

## 1. Graphes planaires

### 1.1. Présentation

On dit qu'un graphe est planaire si on peut le dessiner sans que deux arêtes se croisent. Une telle manière de le dessiner s'appelle une représentation planaire topologique. Les arêtes d'un graphe planaire délimitent des régions du plan que nous appelons faces. Le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un graphe planaire sont reliés par la formule d'Euler.

**Formule d'Euler** : Soit  $G$  un graphe planaire et connexe. Supposons qu'une présentation planaire de  $G$  possède  $s$  sommets,  $a$  arêtes et  $f$  faces. Alors  $s+f = a+2$

**Exemple** : le graphe de gauche ci-dessous est planaire parce qu'en modifiant le tracé d'une arête on peut obtenir le graphe de droite qui est en fait une représentation différente du même graphe, mais sans croisement d'arête.



**1.2. Application** : les graphes planaires sont utilisés dans le routage géographique pour les réseaux ad-hoc sans file. Nous modélisons le réseau par un graphe  $G = (V,E)$ , où  $V$  représente l'ensemble des capteurs et on suppose qu'il existe un lien  $e = (u,v) \in E$  entre les nœuds  $u$  et  $v$  si et seulement si la distance Euclidienne entre  $u$  et  $v$  est telle que  $|uv| \leq R$ , où  $R$  est le rayon de transmission maximal d'un nœud

**7.2.1. Le routage géographique**: l'exploitation des informations géographique des nœuds est la clé principale dans un tel routage afin d'acheminer les paquets de données depuis un nœud source vers la destination. Les techniques gloutons de routage géographique sont simples, souples et passent bien à l'échelle. La plupart des protocoles de routage sont basés sur cette approche. Lorsqu'un nœud a un paquet à envoyer, il choisi le nœud le plus proche de la destination comme prochain saut en se basant sur la mesure de distance selon sa position géographique actuelle.

**7.2.2. Le protocole Greedy Perimeter Stateless Routing (GPSR)**: est un protocole de routage qui utilise la position du nœud courant, celle de ses voisins et la localisation de la destination pour prendre une décision de routage. Les données transmises vont aller vers les nœuds qui diminuent le plus la distance à la destination. Quand la région rend le transfert du paquet impossible (rencontre d'un obstacle), l'algorithme change de mode et envoie le paquet le long du périmètre de la région problématique.

**A) Greedy Forwarding** : un nœud peut prendre une décision optimale et locale pour choisir le prochain nœud à qui transférer le paquet reçu. Le nœud suivant est toujours le voisin le plus proche de la destination.

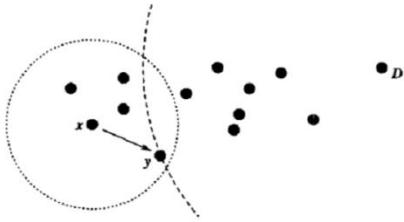


Figure 1 . Exemple de *Greedy Forwarding*. *y* est le voisin de *x* le plus proche de la destination *D*.

Toutefois, la méthode greedy peut échouer. Dans la figure qui suit, on constate que *x* est aussi proche de *D* que ses voisins *w* et *y*. Bien que deux chemins mènent à la destination ( $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow D$ ) et ( $x \rightarrow w, w \rightarrow v, z \rightarrow D$ ), le nœud *x* ne choisit aucun d'eux. Pour sortir de cette situation problématique, d'autres mécanismes de routage sont utilisés.

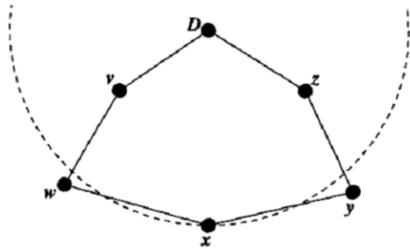


Figure 2. Echec de la méthode *greedy*

B) **perimeter forwarding** : Une méthode connue pour contourner des obstacles est la règle de la main droite, Avec cette méthode, il est possible de traverser l'intérieur d'une facette.

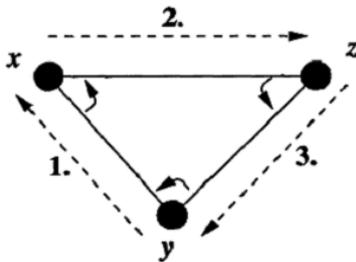


Figure 3. Règle de la main droite. *y* envoie les données à *x*, *x* les envoie à *z* en suivant un sens antihoraire.

La figure 3 montre qu'une fois arrivé au nœud *x* depuis le nœud *y*, le prochain coté à traverser est le suivant dans le sens antihoraire par rapport à *x* depuis le coté (*x*, *y*). En utilisant cette méthode, on peut atteindre la destination dans la figure 2 avec le chemin ( $x \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow D$ ). Toutefois, la méthode de la main droite n'est pas infallible. Elle ne s'applique qu'aux graphes planaires (exemple figure 4). Pour que la méthode de la main droite soit applicable, un sous-graphe planaire est extrait depuis le graphe du réseau avec des algorithmes comme « Relative Neighborhood Graph (RNG) »

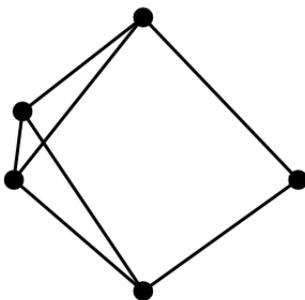


Figure 4. Exemple où la méthode de la main droite ne peut être appliquée correctement

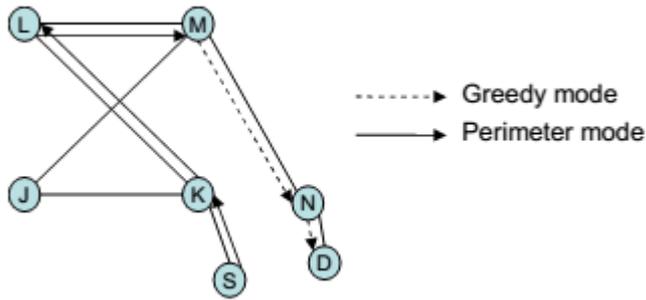


Figure 5. Combinaison des deux méthodes greedy et perimeter pour aller de S à D

**La méthode de planairisation RNG:** défini par Toussaint (1980), Par définition, deux nœuds  $p$  et  $q$  sont des voisins relatifs s'il n'existe aucun autre nœud  $r$  plus proche de  $p$  et de  $q$  qu'ils ne le sont entre eux.

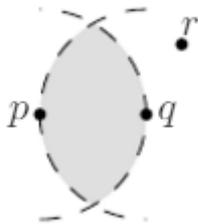


Figure 6. Voisinage relatif de deux points  $p, q$

Avec la méthode RNG, s'il existe une arête entre deux nœuds qui ne sont pas voisins, alors il sera éliminé.

**7.2.3. Le protocole face walking :** a été utilisé comme l'algorithme transversal de graphe planaire de base dans les techniques de routage sur graphe planaire. Avec Face, le message à router parcourt la périphérie des faces traversées par la droite (SD). Le message progresse ainsi de face en face vers la destination. Face utilise deux primitives pour traverser un graphe « la règle de main droite » et « changer faces ». Dans l'exemple de la figure 7, on trace une droite de la source S à la destination D, le segment SD traverse un ensemble de face. Les paquets doivent être acheminés dans chaque face (par ordre de travers) selon la règle de main droite. A chaque fois qu'une arête croisant la ligne SD est rencontrée, un changement de face est effectué jusqu'à l'atteinte de la destination D

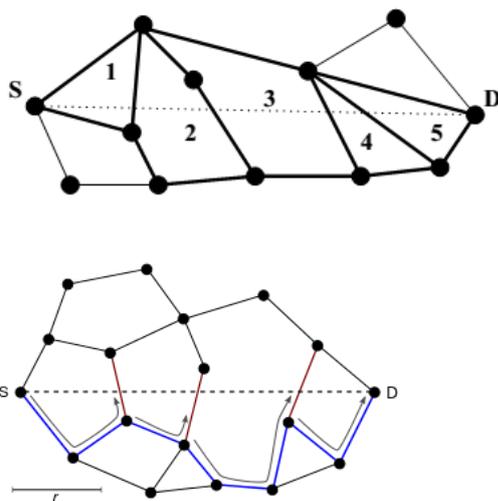


Figure 7. Application de la méthode de face walking dans un graphe planaire pour acheminer un paquet de la source S à la destination D