

COURS SUR METHODES NUMERIQUES ET  
APPROXIMATIONS  
pour Master 1 Électrotechniques

HARBI ABIDA

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Rappels sur quelques méthodes numériques</b>	<b>1</b>
1	Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes itératives	2
1.1	Méthode de Jacobi . . . . .	3
1.2	Méthode de Gauss-Seidel . . . . .	6
1.3	Méthode de relaxation (SOR. Successive Over Relaxation) . .	9
1.4	La méthode de Gradient . . . . .	10
2	Résolution des systèmes d'équations nonlinéaires par les méthodes itératives . . . . .	11
2.1	Rappel sur quelques notions de base du calcul différentiel . . .	11
2.2	La méthode de Newton . . . . .	12
2.3	Méthode des approximations successives . . . . .	13
3	Série d'exercices 1 . . . . .	13

---

Corrigé série 116		
5	Intégration numérique . . . . .	31
5.1	La méthode des Trapèzes . . . . .	31
5.2	La méthode de Simpson . . . . .	32
5.3	La méthode des rectangles . . . . .	33
6	Série d'exercices 2 . . . . .	34
7	Résolution numérique des équations différentielles ordinaires . . . . .	41
7.1	La méthode d'Euler . . . . .	41
7.2	La méthode de Runge-Kutta . . . . .	44
8	Série d'exercices 3 . . . . .	46
8.1	Corrigé série 3 . . . . .	49

---

## PREFACE

This is the preface. It is an unnumbered chapter. The [markboth]  $\text{\TeX}$  field at the beginning of this paragraph sets the correct page heading for the Preface portion of the document. The preface does not appear in the table of contents.

# CHAPITRE 1

---

## RAPPELS SUR QUELQUES MÉTHODES NUMÉRIQUES

# 1 Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes itératives

Soit un système d'équations linéaires

$$AX = b \tag{1.1}$$

où  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  et inversible ( $\det A \neq 0$ ),  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . Les méthodes itératives pour la résolution des systèmes d'équations linéaires consistent à construire une suite de vecteurs  $(X_k)$ ;  $k \in \mathbb{N}$  et  $X_k \in \mathbb{R}^n$  laquelle converge vers la solution (le vecteur)  $X \in \mathbb{R}^n$  de  $AX = b$ . On décompose la matrice  $A$  sous la forme de la soustraction de deux matrices carrées d'ordre  $n$

$$A = M - N$$

où  $M$  est une matrice inversible. La solution  $X$  de (1.1) vérifie alors

$$X = M^{-1}NX + M^{-1}b$$

La méthode itérative pour la résolution du système (1.1) est définie par

$$\begin{cases} X_0 \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = M^{-1}NX_k + M^{-1}b; k \geq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Lorsque la suite  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente, sa limite est solution du système (1.1)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} X_k = X$$

D'un point de vue pratique il faut savoir à quel moment  $X_k$  est suffisamment proche du vecteur solution  $X$ . On introduit alors un test d'arrêt

$$\|X_k - X\| < \epsilon$$

où  $\epsilon$  est la précision désirée,  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$  laquelle est définie par  $\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

**Définition 1.1** Soit  $A$  une matrice carrée quelconque. Le rayon spectral de la matrice  $A$  qu'on note par  $\rho(A)$  est par définition la plus grande valeur propre en valeur absolue, de la matrice  $A$  :

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda_i(A)| ; i = 1, \dots, n \}.$$

**Proposition 1.1** La méthode itérative (1.2) converge si et seulement si le rayon spectral de la matrice  $M^{-1}N$  est strictement inférieur à un

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

## 1.1 Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi repose sur la décomposition de la matrice  $A$  du système (1.1) comme suit

$$A = D - N$$

où  $D = \text{Diag}(a_{ii})$  est la matrice diagonale formée des éléments diagonaux de  $A$  ; S'ils sont tous non nuls la matrice  $D$  est inversible. La méthode de Jacobi s'écrit alors

$$\begin{cases} X_0 \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = D^{-1}NX_k + D^{-1}b; k \geq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

La matrice

$$J = D^{-1}N$$



est dite la matrice de Jacobi. On peut formuler la méthode de Jacobi de la manière équivalente suivante ; sachant que  $X_k = (X_{1,k}, \dots, X_{n,k}) \in \mathbb{R}^n$

$$X_{i,k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} X_{j,k} \right); \quad k \geq 0 \text{ et } i = 1, \dots, n$$

**Définition 1.2** On dit qu'une matrice  $A$  est à diagonale dominante stricte si quelque soit  $i = 1, \dots, n$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

**Proposition 1.2** Si la matrice  $A$  du système (1.1) est à diagonale dominante stricte alors  $\rho(D^{-1}N) < 1$  et la méthode de Jacobi converge.

**Exemple 1.1** On considère un exemple dans  $\mathbb{R}^3$  : Soit respectivement la matrice

$A$  d'ordre 3 et le vecteur  $b$  dans  $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur initial

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

et la précision  $\epsilon = 10^{-2}$ . On effectue la décomposition de la matrice  $A$

$$A = D - N = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{4} I_D$$

où  $I_D$  est la matrice identité. La matrice  $J$  de Jacobi est alors

$$J = D^{-1}N = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$D^{-1}b = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La méthode de Jacobi s'écrit alors

$$X_{k+1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_k - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad k \geq 0$$

$X_0$  le vecteur initial

Ainsi

$$k = 0: X_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_0 - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$k = 1: X_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_1 - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ 0 \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{16} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$k = 2: X_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_2 - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{16} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{64} \\ -\frac{3}{8} \\ -\frac{21}{64} \end{pmatrix}$$

On regroupe les résultats dans le tableau qui suit

$k$	$X_k$	$\ X_{k+1} - X_k\ $
0	$X_0 = (0.5, 0.5, 0.5)^T$	.
1	$X_1 = \left(-\frac{1}{8}, 0.5, -\frac{1}{8}\right)^T$	$\ X_1 - X_0\  = 0.883883 > \epsilon$
2	$X_2 = (-0.25, -0.3125, -0.25)^T$	$\ X_2 - X_1\  = 0.359035 > \epsilon$
3	$X_3 = (-0.328125, -0.375, -0.328125)^T$	$\ X_3 - X_2\  = 0.126938 > \epsilon$
4	$X_4 = \left(-\frac{11}{32}, -\frac{53}{128}, -\frac{11}{32}\right)^T$	$\ X_4 - X_3\  = 0.044879 > \epsilon$
5	$X_5 = \left(-\frac{181}{512}, -\frac{27}{64}, -\frac{181}{512}\right)^T$	$\ X_5 - X_4\  = 0.015867 > \epsilon$
6	$X_6 = \left(-\frac{91}{256}, -\frac{437}{1024}, -\frac{91}{256}\right)^T$	$\ X_6 - X_5\  = 0.005609 > \epsilon$
7	$X_7 = \left(-\frac{1461}{4096}, -\frac{219}{512}, -\frac{1461}{4096}\right)^T$	$\ X_7 - X_6\  = 0.001983 > \epsilon$
8	$X_8 = \left(-\frac{731}{2048}, -\frac{3509}{8192}, -\frac{731}{2048}\right)^T$	$\ X_8 - X_7\  = 0.000701 = 0.0701 < 10^{-2}$

(Tableau 1.1)

Ainsi  $X_8 = (-0.35693, -0.42834, -0.35693)^T$  est la solution approchée de  $X$  par la méthode itérative de Jacobi avec la précision  $\epsilon = 10^{-2}$  : On calcule le rayon spectral de la matrice  $J$ . Les valeurs propres de la matrice  $J$  sont solution de l'équation

$$\det(J - \lambda I_D) = 0$$

Donc

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & \frac{1}{4} \\ 0 & & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 = 0$$

Par conséquent

$\lambda_i(J) = 0$  ce qui implique  $\rho(J) = 0 < 1$ ; la méthode de Jacobi converge.

## 1.2 Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel repose sur la décomposition de la matrice  $A$  du système (1.1) comme suit

$$A = M - N$$

où la matrice  $M$  est la matrice triangulaire inférieure

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La méthode de Gauss-Seidel s'écrit alors

$$\begin{cases} X_0 \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = M^{-1}NX_k + M^{-1}b; \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

La matrice

$$G = M^{-1}N$$

est dite la matrice de Gauss-Seidel. L'écriture explicite de la méthode de Gauss-Seidel

$$X_{i,k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}X_{j,k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}X_{j,k} \right); \quad k \geq 0 \text{ et } i = 1, \dots, n.$$

**Proposition 1.3** Si la matrice  $A$  du système (1.1) est à diagonale dominante stricte alors  $\rho(M^{-1}N) < 1$  et la méthode de Gauss-Seidel converge.

**Exemple 1.2** On reprend le même exemple traité pour la méthode de Jacobi et on résout le système par la méthode de Gauss-Seidel, les matrices

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $G$  de la méthode de Gauss-Seidel pour cet exemple est

$$G = M^{-1}N = -\frac{1}{64} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & 0 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 \\ 0 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Le vecteur

$$M^{-1}b = -\frac{1}{64} \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

On trouve le tableau suivant

$k$	$X_k$	$\ X_{k+1} - X_k\ $
0	$X_0 = (0.5, 0.5, 0.5)^T$	.
1	$X_1 = \left(-\frac{1}{8}, -\frac{5}{32}, -\frac{18.5}{64}\right)^T$	$\ X_1 - X_0\  = 19.021600 > \epsilon$
2	$X_2 = \left(-\frac{37}{128}, -\frac{101}{256}, -\frac{357}{1024}\right)^T$	$\ X_2 - X_1\  = 0.295369 > \epsilon$
3	$X_3 = \left(-\frac{357}{1024}, -\frac{869}{2048}, -\frac{2917}{8192}\right)^T$	$\ X_3 - X_2\  = 0.067016 > \epsilon$
4	$X_4 = \left(-\frac{2917}{8192}, -\frac{7013}{16384}, -\frac{23397}{65536}\right)^T$	$\ X_4 - X_3\  = 0.008377 > \epsilon$
5	$X_5 = \left(-\frac{23397}{65536}, -\frac{56165}{131072}, -\frac{187237}{524288}\right)^T$	$\ X_5 - X_4\  = 0.001047 > \epsilon$
6	$X_6 = \left(-\frac{187237}{524288}, -\frac{449381}{1048576}, -\frac{1497957}{4194304}\right)^T$	$\ X_6 - X_5\  = 0.000130 = 0.13 \times 10^{-3} < \epsilon$

(Tableau 1.2)

Ainsi  $X_6 = (-0.357126, -0.428563, -0.357140)^T$  est la solution approchée de  $X$  par la méthode itérative de Gauss-Seidel avec la précision  $\epsilon = 10^{-3}$ . On peut rajouter la remarque que  $X_6$  est la solution approchée de  $X$  avec trois chiffres significatifs exacts après la virgule.

### 1.3 Méthode de relaxation (SOR. Successive Over Relaxation)

La méthode de relaxation repose sur la décomposition de la matrice  $A$  du système du système (1.1) comme suit

$$A = D - E - F$$

où

$D = \text{Diag}(a_{ii})$  est la matrice diagonale formée des éléments diagonaux de  $A$

$-E$  est la partie triangulaire inférieure stricte de la matrice  $A$ .

$-F$  est la partie triangulaire supérieure stricte de la matrice  $A$ .

On appelle la méthode de relaxation pour le paramètre  $\omega$ , la méthode itérative associée à la décomposition

$$M = \frac{1}{\omega}D - E \text{ et } N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$$

La méthode de relaxation s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = \left( \frac{1}{\omega}D - E \right)^{-1} \left( \frac{1-\omega}{\omega}D + F \right) X_k + \left( \frac{1}{\omega}D - E \right)^{-1} b; \quad k \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.5)$$

La matrice de la méthode de relaxation est  $R_\omega$

$$R_\omega = \left( \frac{1}{\omega}D - E \right)^{-1} \left( \frac{1-\omega}{\omega}D + F \right)$$

L'écriture explicite de la méthode de relaxation est

$$X_{i,k+1} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_{j,k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_{j,k} \right) + (1-\omega) X_{i,k}; \quad k \geq 0 \text{ et } i = 1, \dots, n.$$

**Remarque 1.1** Pour que la méthode de relaxation soit bien définie il faut que la matrice  $D$  soit non singulière.

- Si  $\omega = 1$  ; on retrouve la méthode de Gauss-Seidel.
- Si  $\omega < 1$  ; c'est une méthode de sous-relaxation.
- Si  $\omega > 1$  ; c'est une méthode de sur-relaxation.

**Proposition 1.4** Si la matrice  $A$  du système (1.1) est symétrique définie positive alors la méthode de relaxation converge pour  $\omega \in ]0, 2[$ .

## 1.4 La méthode de Gradient

Soit un paramètre réel  $\alpha \neq 0$ . On appelle méthode de Gradient la méthode itérative associée à la décomposition suivante de la matrice  $A$  du système (1.1) ;

$$M = \frac{1}{\alpha}D \text{ et } N = \frac{1}{\alpha}D - A$$

La méthode de Gradient s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = \left(\frac{1}{\alpha}D\right)^{-1} \left(\frac{1}{\alpha}D - A\right) X_k + \left(\frac{1}{\alpha}D\right)^{-1} b \\ \qquad \qquad \qquad = (I_D - \alpha A) X_k + \alpha D^{-1}b; \quad k \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

La matrice

$$G_{GRADIENT} = I_D - \alpha A.$$

est dite la matrice de Gradient.

**Proposition 1.5** Si la matrice  $A$  du système (1.1) est symétrique définie positive S.D.P. alors la méthode de Gradient converge si  $\alpha \in \left]0, \frac{2}{\lambda_{\min}(A)}\right[$  où  $\lambda_{\min}(A)$  est la plus petite valeur propre de la matrice  $A$  et la choix optimal de la valeur de  $\alpha$  est

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A)}.$$

## 2 Résolution des systèmes d'équations nonlinéaires par les méthodes itératives

Considérons une fonction

$$\begin{aligned} f & : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X & = (x_1, \dots, x_n)^T \rightarrow f(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))^T \end{aligned}$$

L'équation  $f(X) = 0$  représente un système de  $n$  équations nonlinéaires à  $n$  inconnues  $x_1, \dots, x_n$  que l'on peut écrire sous la forme suivante

$$f(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(X) \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^n}. \quad (1.7)$$

où les fonctions  $f_i(X)$ ;  $i = 1, \dots, n$  sont les applications coordonnées de  $f$ .

### 2.1 Rappel sur quelques notions de base du calcul différentiel

Soit une fonction  $g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable en  $X \in U$ . La dérivée de la fonction  $g(X)$  est la forme linéaire  $Dg(X)$

$$\begin{aligned} Dg(X) & : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ Dg(X)(Y) & \rightarrow \langle Dg(X), Y \rangle \end{aligned}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit scalaire dans  $\mathbb{R}$  et est défini par : Pour tous vecteurs  $X; Y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (1.8)$$



$\nabla g(X)$  est le gradient de la fonction  $g(X)$  et est défini par

$$\nabla g(X) = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}(X), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(X) \right)^T. \quad (1.9)$$

Pour une application vectorielle  $f(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))^T$

$$Df(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X) \end{pmatrix}$$

La matrice

$$J_f(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X) \end{pmatrix}$$

est dite la matrice Jacobienne de  $f$ .

## 2.2 La méthode de Newton

La méthode de Newton pour la résolution du système (1.7) consiste à calculer la suite  $(X_k)$ ;  $k \in \mathbb{N}$  et  $X_k \in \mathbb{R}^n$ , définie par

$$\begin{cases} X_0 \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = X_k - (J_f(X_k))^{-1} f(X_k); \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Ainsi pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots$  on doit calculer

$$J_f(X_k), (J_f(X_k))^{-1} \text{ et } f(X_k).$$

## 2.3 Méthode des approximations successives

L'idée principale de la méthode des approximations successives consiste à écrire le système (1.7) sous la forme

$$g(X) = X \quad (1.11)$$

Donc  $X$  est un point fixe de l'application  $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  et la méthode des approximations successives est définie par

$$\begin{cases} X_0 \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = g(X_k); k \geq 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

### Proposition 1.6

Si l'application  $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1(\mathbb{R}^n)$  et toutes les valeurs propres de la matrice  $Jg(X)$  sont strictement inférieures un, alors la méthode des approximations successives converge vers la solution  $X$  du système (1.7).

## 3 Série d'exercices 1

Université Badji-Mokhtar-Annaba  
Département Électrotechniques  
Master I

Année 2020-2021

### Série 1 : Méthodes Itératives Système Linéaires et Nonlinéaires

**Exercice 1** Considérons le système linéaire dans  $\mathbb{R}^3$  suivant

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 8x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 7 \end{cases}$$

1. Montrer que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Saidel convergent.

2. Calculer la matrice d'itération  $J$  de Jacobi et  $G$  de Gauss-Seidel.
3. En partant de la donnée initiale  $X^{(0)} = (1, 0.8, 0.8)^T$  calculer la solution approchée  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  par la méthode de Jacobi à  $10^{-2}$  près en utilisant le critère d'arrêt sur l'incrément.

**Exercice 2** Calculer le rayon spectral de la matrice de Jacobi et la matrice de Gauss-Seidel pour les deux matrices A et B suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3** Considérons la matrice tri-diagonale suivante

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice  $A$  est symétrique définie positive.
2. Sachant que la matrice  $B_{GR}$  de la méthode du gradient associé à la résolution du système linéaire  $Ax = b$  est définie par

$$B_{GR} = I_D - \alpha A$$

où  $I_D$  est la matrice identité, déterminer pour quelles valeurs de  $\alpha$  la méthode du gradient converge.

- (a) Calculer les cinq premières itérations par les méthodes du gradient en partant de  $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ .
3. Appliquer la méthode de relaxation pour la résolution du système linéaire  $Ax = b$  pour  $w = 1.25$ .
4. On prend  $b = (24, 30, -24)^T$  et en partant de  $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$  calculer les cinq premières itérations par les méthodes de Gauss-Seidel et de relaxation.

### 3. Série d'exercices 1

---

**Exercice 4** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et soit le système linéaire  $Ax = b$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la matrice  $A$  est-elle définie positive.
2. Montrer que pour tout  $\alpha \in \left] -\frac{1}{2}, 1 \right[$  la méthode de relaxation converge pour tout  $w \in ]0, 2[$ .
3. Ecrire la matrice  $J$  de Jacobi correspondante. Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la méthode de Jacobi converge.
4. Ecrire la matrice  $G$  de Gauss-Saidel correspondante. Calculer  $\rho(G)$ .

**Exercice 5** On considère le système non linéaire

$$\begin{cases} ye^x - 2 = 0 \\ y + x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

1. Faire une itération de la méthode de Newton en partant de l'approximation initiale  $(x^0, y^0) = (0, 1)$ .
2. Est-il possible de prendre l'approximation initiale  $(x^0, y^0) = (1, 2)$ .

**Exercice 6** On veut résoudre le système non linéaire

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + xy + z^2 = 1 \end{cases}$$

1. Effectuer 3 itérations de la méthode de Newton en partant du vecteur initial  $(x^0, y^0, z^0) = (0.75, -0.75, 0.75)$ .
2. Pour quels vecteurs initiaux ne peut-on pas démarrer l'algorithme.

## Corrigé série 1

### Exercice 1

La matrice du système linéaire est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -8 & 5 \\ 3 & -5 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1. Pour que les deux méthodes itératives de Jacobi et de Gaus-Seidel convergent il suffit que la matrice  $A$  du système linéaire soit à diagonale dominante stricte; quelque soit  $i = 1, 2, 3$   $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$

$$|a_{11}| = 4 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n |a_{1j}| = 2$$

$$|a_{22}| = 8 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n |a_{2j}| = 7$$

$$|a_{33}| = 9 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^n |a_{3j}| = 8.$$

2. La matrice de Jacobi  $J = D^{-1}N$  où

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$J = D^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{9} & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de Gauss-Seidel  $G = M^{-1}N$  où

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 0 \\ 3 & -5 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$G = M^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{7}{144} & -\frac{5}{72} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{16} & \frac{9}{16} \\ 0 & \frac{7}{144} & \frac{57}{144} \end{pmatrix}$$

3. On regroupe les résultats dans le tableau qui suit

$k$	$X_k$	$\ X_{k+1} - X_k\ $
0	$X_0 = (1, 0.8, 0.8)^T$	.
1	$X_1 = (1.1, 0.875, 0.8889)^T$	$\ X_1 - X_0\  = 0.153 > \epsilon$
2	$X_2 = (1.059, 0.9556, 0.8972)^T$	$\ X_2 - X_1\  = 0.090 > \epsilon$
3	$X_3 = (1.0368, 0.9505, 0.9556)^T$	$\ X_3 - X_2\  = 0.062 > \epsilon$
4	$X_4 = (1.0235, 0.9815, 0.9602)^T$	$\ X_4 - X_3\  = 0.034 > \epsilon$
5	$X_5 = (1.0146, 0.9810, 0.9819)^T$	$\ X_5 - X_4\  = 0.023 > \epsilon$
6	$X_6 = (1.0093, 0.9923, 0.9848)^T$	$\ X_6 - X_5\  = 0.012 > \epsilon$
7	$X_7 = (1.0058, 0.9927, 0.9928)^T$	$\ X_7 - X_6\  = 0.0088 < 10^{-2} = \epsilon$

(Tableau 1.3)

### Exercice 2

La matrice de Jacobi relative à la matrice  $A$  est

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice  $J_A$  sont solutions de l'équation

$$\det(J_A - \lambda I_D) = 0 \text{ donc } \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 = 0$$

Ce qui implique que  $\rho(J_A) = \max\{|\lambda_i(J_A)|; i = 1, 2, 3\} = 0 < 1$ . La méthode de Jacobi converge. La matrice de Gauss-Seidel relative à la matrice  $A$  est

$$G_A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice  $G_A$  sont solutions de l'équation

$$\det(G_A - \lambda I_D) = 0 \text{ donc } \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & -3 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2 - \lambda) = 0$$

Ce qui implique que  $\rho(G_A) = \max\{|\lambda_i(G_A)|; i = 1, 2, 3\} = 2 > 1$ . La méthode de Gauss-Seidel diverge. De la même manière on obtient

$$\rho(J_B) = \max\{|\lambda_i(J_B)|; i = 1, 2, 3\} = 0 < 1.$$

Et

$$\rho(G_B) = \max\{|\lambda_i(G_B)|; i = 1, 2, 3\} = \frac{1}{2} < 1.$$

Les deux méthodes itératives convergent pour la matrice  $B$ .

**Exercice 3** Considérons la matrice tri-diagonale suivante

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. La matrice  $A$  est symétrique définie positive si et seulement si

**a**  $A$  une matrice symétrique  $a_{ij} = a_{ji}$  pour  $i, j = 1, 2, 3$  et  $i \neq j$ . Cette condition est vérifiée car  $a_{12} = a_{21} = 3$ ;  $a_{13} = a_{31} = 0$  et  $a_{23} = a_{32} = -1$ .

**b** Toutes les valeurs propre de la matrice  $A$  sont positives. On commence par calculer les valeurs propres de la matrice  $A$ , lesquelles sont solutions de

$$\det(A - \lambda I_D) = 0 \text{ donc } \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 3 & 0 \\ 3 & 4 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 6) = 0.$$

Les valeurs propres sont donc

$$\lambda_1 = 4 > 0; \lambda_2 = 4 + \sqrt{10} > 0; \lambda_3 = 4 - \sqrt{10} > 0.$$

La matrice  $A$  est S.D.P.

2. La matrice  $B_{GR}$  de la méthode du gradient associé à la résolution du système linéaire  $Ax = b$  est définie par  $B_{GR} = I_D - \alpha A$ . La méthode de Gradient converge si

$$\alpha \in \left] 0, \frac{2}{\lambda_{\min}} \left[ = \left] 0, \frac{2}{4 - \sqrt{10}} \left[$$

avec un choix optimal de

$$\alpha_{Optimal} = \frac{1}{4}.$$

**a** Les cinq premières itérations par les méthodes du gradient en partant de  $X^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ . Sachant que la méthode de Gradient s'écrit

$$\begin{cases} X_0 = (1, 1, 1)^T \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = (I_D - \alpha A) X_k + \alpha D^{-1} b; k \geq 0 \end{cases} \quad (1.13)$$



La matrice de la méthode du Gradient étant

$$G_{Gradient} = I_D - \alpha_{Optimal}A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Et le vecteur

$$\alpha D^{-1}b = b = \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

On obtient le tableau qui suit

$k$	$X_k$	$\ X_{k+1} - X_k\ $
0	$X_0 = (1, 1, 1)^T$	.
1	$X_1 = \left(\frac{93}{4}, \frac{59}{2}, -\frac{95}{4}\right)^T$	$\ X_1 - X_0\  = 43.816378 > \epsilon$
2	$X_2 = \left(\frac{15}{8}, \frac{53}{8}, -\frac{133}{8}\right)^T$	$\ X_2 - X_1\  = 32.107972 > \epsilon$
3	$X_3 = \left(\frac{609}{32}, \frac{391}{16}, -\frac{715}{32}\right)^T$	$\ X_3 - X_2\  = 25.383580 > \epsilon$
4	$X_4 = \left(\frac{363}{64}, \frac{649}{64}, -\frac{1145}{64}\right)^T$	$\ X_4 - X_3\  = 20.067448 > \epsilon$
5	$X_5 = \left(\frac{4197}{256}, \frac{2723}{128}, -\frac{5495}{256}\right)^T$	$\ X_5 - X_4\  = 15.864737 > \epsilon$

3. La méthode de relaxation pour la résolution du système linéaire  $Ax = b$  pour  $w = 1.25$ . La matrice de la méthode de relaxation est  $R_w$

$$R_w = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = D - E - F$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_D; \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices  $M$  et  $N$

$$M = \frac{1}{\omega}D - E = \frac{4}{1.24}I_D - E = \begin{pmatrix} 3.2 & 0 & 0 \\ 3 & 3.2 & 0 \\ 0 & -1 & 3.2 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F = -0.8I_D + F = \begin{pmatrix} -0.8 & -3 & 0 \\ 0 & -0.8 & 1 \\ 0 & 0 & -0.8 \end{pmatrix}$$

Donc

$$M^{-1} = \frac{1}{(3.2)^3} \begin{pmatrix} (3.2)^2 & 0 & 0 \\ -3(3.2) & (3.2)^2 & 0 \\ -3 & 3.2 & (3.2)^2 \end{pmatrix}$$

et

$$R_\omega = R_{1.25} = \frac{1}{(3.2)^3} \begin{pmatrix} -8.192 & -30.72 & 0 \\ 7.68 & 20.608 & (3.2)^2 \\ 2.4 & 6.44 & -4.992 \end{pmatrix}$$

4. Les cinq premières itérations par la méthode de relaxation. On calcule le vecteur

$$M^{-1}b = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} b = \frac{1}{(3.2)^3} \begin{pmatrix} 245.76 \\ 76.8 \\ -221.776 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = (1, 1, 1)^T \text{ le vecteur initial} \\ X_{k+1} = \frac{1}{(3.2)^3} \begin{pmatrix} -8.192 & -30.72 & 0 \\ 7.68 & 20.608 & (3.2)^2 \\ 2.4 & 6.44 & -4.992 \end{pmatrix} X_k + \frac{1}{(3.2)^3} \begin{pmatrix} 245.76 \\ 76.8 \\ -221.776 \end{pmatrix}; k \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.14)$$

On obtient les résultats suivants où les cinq premières itérations par les méthodes de relaxation sont calculées. En plus on donne les résultats avec la précision  $\epsilon = 10^{-2}$  laquelle nécessite le calcul de sept itérations.

$k$	$X_k$	$\ X_{k+1} - X_k\ $
0	$X_0 = (1, 1, 1)^T$	.
1	$X_1 = (6.3125, 3.5195, -6.6501)^T$	$\ X_1 - X_0\  = 9.6485 > \epsilon$
2	$X_2 = (2.6223, 3.9585, -4.6004)^T$	$\ X_2 - X_1\  = 4.2440 > \epsilon$
3	$X_3 = (3.1333, 4.0102, -5.0969)^T$	$\ X_3 - X_2\  = 0.7143 > \epsilon$
4	$X_4 = (2.9571, 4.0073, -4.9734)^T$	$\ X_4 - X_3\  = 0.2151 > \epsilon$
5	$X_5 = (3.0038, 4.0028, -5.0057)^T$	$\ X_5 - X_4\  = 0.0569 > \epsilon$
6	$X_6 = (2.9964, 4.0008, -4.9983)^T$	$\ X_6 - X_5\  = 0.01065 > \epsilon$
7	$X_7 = (3.00015, 4.0001, -5.0003)^T$	$\ X_7 - X_6\  = 0.42 \times 10^{-2} < \epsilon = 10^{-2}$ .

On fait remarquer que la solution exacte est

$$X = (3, 4, -5)^T.$$

Les cinq premières itérations par les méthodes de Gauss-Seidel

$k$	$X_k$	$\ X_{k+1} - X_k\ $
0	$X_0 = (1, 1, 1)^T$	.
1	$X_1 = (5.25, 3.8125, -5.0468)^T$	$\ X_1 - X_0\  = 7.9079 > \epsilon$
2	$X_2 = (3.1406, 3.8828, -5.0292)^T$	$\ X_2 - X_1\  = 2.1106 > \epsilon$
3	$X_3 = (3.0879, 3.9267, -5.0183)^T$	$\ X_3 - X_2\  = 0.0694 > \epsilon$
4	$X_4 = (3.0549, 3.9541, -5.0114)^T$	$\ X_4 - X_3\  = 0.0434 > \epsilon$
5	$X_5 = (3.0344, 3.9713, -5.0071)^T$	$\ X_5 - X_4\  = 0.0271 > \epsilon$

**Exercice 4** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et soit le système linéaire  $Ax = b$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

1. La matrice  $A$  est définie positive si toutes les valeurs propre de la matrice  $A$  sont positives. On commence par calculer les valeurs propres de la matrice  $A$ , lesquelles sont solutions de

$$\det(A - \lambda I_D) = 0 \text{ donc } \begin{vmatrix} 1 - \lambda & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 - \lambda & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3 - 3\alpha^2(1 - \lambda) + 2\alpha^3 = 0.$$

Pour simplifier les calculs on pose

$$\beta = 1 - \lambda$$

Alors on doit résoudre l'équation du troisième ordre

$$\beta^3 - 3\alpha^2\beta + 2\alpha^3 = 0 \tag{1.15}$$

$\alpha$  étant solution de (1.15) cette dernière devient

$$\beta^3 - 3\alpha^2\beta + 2\alpha^3 = (\beta - \alpha)(\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha^2) = 0 \quad (1.16)$$

Les solutions de (1.16) sont

$$\beta_1 = \alpha \text{ et } \beta_2 = -2\alpha$$

Alors

$$\beta_1 = \alpha = 1 - \lambda_1 \text{ et } \beta_2 = -2\alpha = 1 - \lambda_2$$

Ainsi les valeurs propres de la matrice  $A$  sont

$$\lambda_1 = 1 - \alpha \text{ et } \lambda_2 = 1 + 2\alpha$$

Si  $A$  est définie positive alors

$$\lambda_1 = 1 - \alpha > 0 \text{ et } \lambda_2 = 1 + 2\alpha > 0$$

ce qui implique

$$\alpha < 1 \text{ et } \alpha > -\frac{1}{2}. \text{ Ainsi } \alpha \in \left] -\frac{1}{2}, 1 \right[.$$

2. On sait que la méthode de relaxation converge si la matrice  $A$  du système est définie positive et le paramètre  $\omega \in ]0, 2[$ . Ainsi pour  $\alpha \in \left] -\frac{1}{2}, 1 \right[$  la méthode de relaxation converge pour tout  $\omega \in ]0, 2[$ .

3. Ecrire la matrice  $J$  de Jacobi correspondante est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Dont les valeurs propres sont solutions de

$$\det(J - \lambda I_D) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\lambda & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\alpha^2\lambda - 2\alpha^3 = -(\lambda - \alpha)^2(\lambda + 2\alpha) = 0$$

Alors

$$\lambda_1(J) = \alpha \text{ et } \lambda_2(J) = -2\alpha$$

La méthode de Jacobi converge si

$$\rho(J) = \max\{|\alpha|, 2|\alpha|\} = 2|\alpha| < 1$$

donc si

$$|\alpha| < \frac{1}{2} \text{ Ainsi } \alpha \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[.$$

Les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles la méthode de Jacobi converge sont  $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$ .

4. La matrice  $G$  de Gauss-Seidel correspondante est

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha^2 & \alpha(\alpha - 1) \\ 0 & -\alpha^2(\alpha - 1) & \alpha^2(2 - \alpha) \end{pmatrix}$$

Dont les valeurs propres sont solutions de

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & -\alpha \\ 0 & \alpha^2 - \lambda & \alpha(\alpha - 1) \\ 0 & -\alpha^2(\alpha - 1) & \alpha^2(2 - \alpha) - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda) ((\alpha^2 - \lambda)(\alpha^2(2 - \alpha) - \lambda) + \alpha^3(\alpha - 1)^2) \\ &= (-\lambda) (\alpha^4(2 - \alpha) - \alpha^2\lambda - \alpha^2(2 - \alpha)\lambda + \lambda^2 + \alpha^3(\alpha - 1)^2) \\ &= (-\lambda) (\alpha^4(2 - \alpha) - \alpha^2(3 - \alpha)\lambda + \lambda^2 + \alpha^3(\alpha - 1)^2) \\ &= (-\lambda) (\lambda^2 - \alpha^2(3 - \alpha)\lambda + \alpha^3) \end{aligned}$$

Le discriminant  $\Delta$  de  $\lambda^2 - \alpha^2(3 - \alpha)\lambda + \alpha^3$  est

$$\Delta = \alpha^3(\alpha - 1)^2(\alpha - 4) > 0 \text{ ssi } \alpha \in ]-\infty, 0[ \cup ]4, +\infty[ \quad (1.17)$$

$$\Delta = 0 \text{ ssi } \alpha = 0, \text{ ou } \alpha = 1, \text{ ou } \alpha = 4. \quad (1.18)$$

**a** Dans le cas de (1.17) les valeurs propres de la matrice  $G$  sont

$$\begin{aligned} \lambda_1(G) &= 0 \\ \lambda_2(G) &= \frac{\alpha^2(3 - \alpha) - \sqrt{\alpha^3(\alpha - 1)^2(\alpha - 4)}}{2} \\ \lambda_3(G) &= \frac{\alpha^2(3 - \alpha) + \sqrt{\alpha^3(\alpha - 1)^2(\alpha - 4)}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\rho(G) = \frac{\alpha^2(3 - \alpha) + (\alpha - 1)\sqrt{\alpha^3(\alpha - 4)}}{2}.$$

**b** Dans le cas de (1.18) les valeurs propres de la matrice  $G$  sont

**Exercice 5** On considère le système nonlinéaire

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_2 e^{x_1} - 2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_2 + x_1^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \text{ où } X = (x_1, x_2)$$

La Jacobienne de  $f$  est

$$J_{f(X)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 e^{x_1} & e^{x_1} \\ 2x_1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Une itération de la méthode de Newton en partant de l'approximation initiale  $(x_1^0, x_2^0) = (0, 1)$  revient à calculer  $X_1$  où

$$\begin{cases} X_0 = (0, 1) \text{ le vecteur initial} \\ X_1 = X_0 - (J_f(X_0))^{-1} f(X_0) \end{cases} \quad (1.19)$$

$$J_{f(X_0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } (J_f(X_0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(X_0) = \begin{pmatrix} f_1(X_0) \\ f_2(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Alors la première itération

$$X_1 = X_0 - (J_f(X_0))^{-1} f(X_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. On ne peut pas prendre l'approximation initiale  $(x_1^0, x_2^0) = (1, 2)$  car dans ce cas

$$J_{f(X_0)} = \begin{pmatrix} 2e & e \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas une matrice inversible.

**Exercice 6** On veut résoudre le système non linéaire

$$\begin{cases} x_1^2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 = 2 \\ x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

lequel est équivalent à

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 1 = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$



1. On calcule 3 itérations de la méthode de Newton en partant du vecteur initial  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0.75, -0.75, 0.75)$ . Donc on calcule  $X_1, X_2, X_3$ . La Jacobienne de  $f$  est

$$J_{f(X)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(X) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(X) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 0 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \\ 2x_1 + x_2 & x_1 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

Alors

$$J_{f(X_0)} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & -1.5 & 0 \\ 0.75 & 0.75 & 1.5 \end{pmatrix} = (1.5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique que

$$(J_{f(X_0)})^{-1} = -\frac{1}{1.5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur

$$f(X_0) = \begin{pmatrix} f_1(X_0) \\ f_2(X_0) \\ f_3(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4375 \\ -0.875 \\ -0.4375 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 - (J_{f(X_0)})^{-1} f(X_0) = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -0.75 \\ 0.75 \end{pmatrix} + \frac{1}{1.5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.4375 \\ -0.875 \\ -0.4375 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.0416 \\ -1.0416 \\ 1.0416 \end{pmatrix} = 1.3888X_0 \end{aligned}$$

Alors

$$J_{f(X_1)} = 1.3888 J_{f(X_0)}$$

donc

$$(J_{f(X_1)})^{-1} = \frac{1}{1.3888} (J_{f(X_0)})^{-1}.$$

Le vecteur

$$f(X_1) = \begin{pmatrix} f_1(X_1) \\ f_2(X_1) \\ f_3(X_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0849 \\ 0.1698 \\ 0.0849 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 - (J_{f(X_1)})^{-1} f(X_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1.0416 \\ -1.0416 \\ 1.0416 \end{pmatrix} + \frac{1}{2.0832} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0849 \\ 0.1698 \\ 0.0849 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.0008 \\ -1.0008 \\ 1.0008 \end{pmatrix} = 1.3344 X_0 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} X_3 &= X_2 - (J_{f(X_2)})^{-1} f(X_2) \\ &= \begin{pmatrix} 1.0008 \\ -1.0008 \\ 1.0008 \end{pmatrix} + \frac{1}{2.0016} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0016 \\ 0.0032 \\ 0.0016 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.0000 \\ -1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On regroupe tous les résultats dans le tableau qui suit

$k$	$X_k$	$\ X_{k+1} - X_k\ $
0	$X_0 = (0.75, -0.75, 0.75)^T$	.
1	$X_1 = (1.0416, -1.0416, 1.0416)^T$	$\ X_1 - X_0\  = 0.5 > \epsilon$
2	$X_2 = (1.0008, -1.0008, 1.0008)^T$	$\ X_2 - X_1\  = 0.0706 > \epsilon$
3	$X_3 = (10000, -10000, 10000)^T$	$\ X_3 - X_2\  = 0.00000192 < \epsilon = 10^{-5}$ .

2. On ne peut pas démarrer l'algorithme si

$$J_{f(X_0)} = \begin{pmatrix} 2x_1^0 & 0 & 0 \\ 2x_1^0 & 2x_2^0 & 0 \\ 2x_1^0 + x_2^0 & x_1^0 & 2x_3^0 \end{pmatrix}$$

n'est pas une matrice inversible, donc si le  $\det J_{f(X_0)} = 0$ ; Or

$$\det J_{f(X_0)} = 2^3 x_1^0 x_2^0 x_3^0 = 0$$

si et seulement si

$$x_1^0 = 0 \text{ ou } x_2^0 = 0 \text{ ou } x_3^0 = 0.$$

## 5 Intégration numérique

Le problème abordé dans cette section est celui du calcul approché d'une intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx. \quad (1.20)$$

**Définition 1.** Une méthode d'intégration numérique approchée est dite d'ordre  $p$  si  $I_{\text{approchée}}(f) = I(f)$  pour tout polynôme d'ordre  $p$  et  $I_{\text{approchée}}(f) \neq I(f)$  pour au moins un polynôme d'ordre  $p + 1$ .

On subdivise l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  sous-intervalles égaux

$$\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b \quad (1.21)$$

On note pour tout  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ h &= \frac{b - a}{n} \end{aligned}$$

### 5.1 La méthode des Trapèzes

L'intégrale (1.20) est approchée par la formule

$$I_T(f) = \frac{h}{2} \left( f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right). \quad (1.22)$$

Avec l'erreur

$$E_T = |I(f) - I_T(f)| \leq M_2(f) \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

Où

$$M_2(f) = \max_{[a,b]} |f''(x)|. \quad (1.23)$$

**Exemple 1.3.** On applique la méthode des Trapèzes pour le calcul approché de

$$I(f) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \ln \sqrt{2} = 0.346573.$$

avec

$$h = \frac{\pi}{40}$$

et

$$x_{i+1} = x_i + h; \quad i = 0, \dots, 10.$$

$x_i$	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{3\pi}{40}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{80}$	$\frac{3\pi}{20}$	$\frac{7\pi}{40}$	(1.24)
$f(x_i)$	0	0.078701	0.158384	0.240078	0.324919	0.414213	0.509525	0.612800	

$x_i$	$\frac{\pi}{50}$	$\frac{9\pi}{40}$	$\frac{\pi}{4}$
$f(x_i)$	0.726542	0.854080	1

(Tableau 1.3)

$$I_T(f) = 0.347086$$

Alors

$$E_T = 0.000513 = 0.0513 \times 10^{-2}.$$

## 5.2 La méthode de Simpson

L'intégrale (1.20) est approchée par la formule

$$I_S(f) = \frac{h}{3} (f(a) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2 + f(b)). \quad (1.25)$$

Où

$$\sigma_1 = f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})$$

et

$$\sigma_2 = f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_n)$$

Avec l'erreur

$$E_S = |I(f) - I_S(f)| \leq M_4(f) \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \quad (1.26)$$

Où

$$M_4(f) = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|. \quad (1.27)$$

**Exemple 1.4** On reprend le meme exemple traité pour la méthode des Trapèzes on trouve

$$I_S(f) = 0.346576$$

avec

$$E_S = 0.3 \times 10^{-4}.$$

### 5.3 La méthode des rectangles

L'intégrale (1.20) est approchée par la formule

$$I_R(f) = h \left( \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right). \quad (1.28)$$

Avec l'erreur

$$E_R = |I(f) - I_R(f)| \leq M_2(f) \frac{(b-a)^3}{24n^2}$$

Où  $M_2(f)$  est défini dans (1.23).

**Exemple 1.5** On reprend le meme exemple traité pour la méthode des Trapèzes on trouve

$$I_S(f) = 0.395789$$

avec

$$E_S = 0.49216 \times 10^{-1}.$$

## 6 Série d'exercices 2

Université Badji-Mokhtar-Annaba  
 Département Électrotechniques  
 Master I

Année 2020-2021

### Série 2 : Intégration Numérique

#### Exercice 1

1. Utiliser la méthode de Simpson et des Trapèzes pour  $N = 6$  pour évaluer l'intégrale suivante

$$I = \int_1^9 \sqrt{x} dx$$

2. Utiliser la méthode de Simpson et des Trapèzes pour  $N = 4$  pour évaluer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

Comparer les deux résultats avec la valeur exacte de l'intégrale.

#### Exercice 2 Soit l'intégrale suivante

$$I = \int_{1.8}^{3.4} e^x dx$$

En utilisant la méthode des trapèzes déterminer le nombre minimum d'intervalles qui assurent une approximation de  $I$  avec au moins trois chiffres significatifs.

**Exercice 3** Utiliser la méthode des rectangles pour  $N = 5$  pour évaluer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

Comparer le résultat avec la valeur exacte.

**Exercice 4** On considère l'intégrale suivante

$$I = \int_0^1 x \ln(1+x) dx$$

Donner une valeur approchée de cette intégrale par la méthode des trapèzes puis par la méthode de Simpson pour  $N = 10$ . Comparer le résultat trouvé avec la valeur exacte.



$$I_S = \frac{9-1}{6(6)} (1 + 2(10.9639) + 3 + 4(13.0179)) = \frac{8}{36} (85.9994) = 17.3332$$

L'erreur

$$|I - I_S| = 0.0001 = 0.1 \times 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-3}.$$

(b) La méthode des Trapèzes

$$I_T = \frac{b-a}{2N} \left( f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(x_N) \right)$$

Alors

$$I_T = \frac{9-1}{2(6)} (1 + 2(10.9639) + 3) = 17.2852$$

L'erreur

$$|I - I_T| = 0.0481 = 0.482 \times 10^{-1} < 0.5 \times 10^{-1}.$$

2. Calcul de

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

dont la valeur exacte est

$$I = \left. \frac{1}{\cos x} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = 0.4142.$$

Le tableau pour

$$h = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{4} = \frac{\pi}{16}$$

et

$$x_i = ih$$

	$x_0 = 0$	$\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{\pi}{32}$	$x_1 = \frac{\pi}{16}$	$\frac{x_1 + x_2}{2} = 3\frac{\pi}{32}$
$f(x_i)$	0	0,0990	0,2028	0,3170

  

$x_2 = \frac{\pi}{8}$	$\frac{x_2 + x_3}{2} = 5\frac{\pi}{32}$	$x_3 = 3\frac{\pi}{16}$	$\frac{x_3 + x_4}{2} = 7\frac{\pi}{32}$	$x_4 = \frac{\pi}{4}$
0,4483	0,6061	0,8036	1,0617	1,4142

(a) La méthode de Simpson

$$\sum_{i=1}^3 f(x_i) = 1.4547$$

$$\sum_{i=1}^4 f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) = 2.0838$$

$$I_S = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{4(6)} (0 + 2(1.4547) + 1,4142 + 4(2.0838)) = \frac{\pi}{96} () = 0.4143$$

L'erreur

$$|I - I_S| = 0.00005 = 0.5 \times 10^{-4} < 0.5 \times 10^{-3}.$$

(b) La méthode des Trapèzes

$$I_T = \frac{b-a}{2N} \left( f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(x_N) \right)$$

Alors

$$I_T = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{2(4)} (0 + 2(1.4547) + 1,4142) = 0.4244$$

L'erreur

$$|I - I_T| = 0.0120 = 0.120 \times 10^{-1} < 0.5 \times 10^{-1}.$$

La méthode de Simpson est plus précise que celle des Trapèzes.

**Exercice 2** Calcul de

$$I = \int_{1.8}^{3.4} e^x dx$$

L'erreur de la méthode des Trapèzes est

$$|I_T| = \left| M_2(f) \frac{(b-a)^3}{12N^2} \right| < 0.5 \times 10^{-3}$$

Donc

$$N^2 > M_2(f) \frac{(b-a)^3}{12(0.5 \times 10^{-3})} \implies N > \sqrt{M_2(f) \frac{(b-a)^3}{12(0.5 \times 10^{-3})}}$$

$$M_2(f) = e^{3.4} = 29.9641$$

$$(b-a)^3 = (3.4 - 1.8)^3 = 4.096$$

Alors

$$N > \sqrt{29.9641 \frac{4.096}{6 \times 10^{-3}}} = 143.022$$

Il suffit de prendre

$$N = 144$$

**Exercice 3** Calcul de

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

La méthode des rectangles est  $N = 5$

$$I_R = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

Pour

$$h = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{5} = \frac{\pi}{10}$$

donc

$$x_i = ih, \quad i = 0, \dots, 5$$

Le tableau est

$\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$	$\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{h}{2} = \frac{\pi}{20}$	$\frac{x_1 + x_2}{2} = 3\frac{h}{2} = 3\frac{\pi}{20}$
$f(x_i)$	0,9877	0,8910

$\frac{x_2 + x_3}{2} = 5\frac{h}{2} = \frac{\pi}{4}$	$\frac{x_3 + x_4}{2} = 7\frac{h}{2} = 7\frac{\pi}{20}$	$\frac{x_4 + x_5}{2} = 9\frac{h}{2} = 9\frac{\pi}{20}$
0,7071	0,4540	0,1564

$$I_R = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{5} \sum_{i=1}^5 f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) = \frac{\pi}{10} (3.1962) = 1.0041$$

Ainsi

$$|I| = 0.0041 = 0.41 \times 10^{-2} < 0.5 \times 10^{-2}$$

Ainsi la valeur de  $I_R = 1.0041$  est correcte avec 2 chiffres significatifs.

## 7 Résolution numérique des équations différentielles ordinaires

Soit  $[t_0, t_0 + T] = [a, b]$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction continue de  $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $y_0$  un élément de  $\mathbb{R}$ ; On cherche une fonction  $y(t) \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R})$  qui vérifie

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ \forall t \in [t_0, t_0 + T] : y'(t) &= f(t, y(t)) \end{aligned} \tag{1.29}$$

Ce problème (1.29) est dit le problème de Cauchy pour l'équation différentielle du premier ordre

$$y'(t) = f(t, y(t)). \tag{1.30}$$

La condition

$$y(t_0) = y_0$$

est dite la condition de Cauchy.

### 7.1 La méthode d'Euler

Il n'est en général pas possible de calculer la solution exacte du problème de Cauchy (1.29). On doit alors utiliser des méthodes numériques. Dans cette sous-section nous étudions la plus simple des méthodes à savoir **la méthode d'Euler explicite (ou Euler progressive)**.

On se donne une subdivision de l'intervalle  $[t_0, t_0 + T]$

$$\sigma : t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_N = t_0 + T \tag{1.31}$$

On note pour tout  $i = 1, \dots, N$

$$t_{i+1} = t_i + h_i$$

Le pas

$$h = h(\sigma) = \max_{1 \leq i \leq N} h_i.$$

La méthode d'Euler explicite est alors définie par

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y_{i+1} = y_i + h_i f(t_i, y_i); \quad i = 0, \dots, N-1. \end{cases} \quad (1.32)$$

L'erreur de discrétisation est

$$E_i = |y(t_i) - y_i|; \quad i = 0, \dots, N-1$$

### Exemple

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 = 1 \\ \forall t \in [0, T]: \quad y'(t) &= y(t) = f(t, y(t)) \end{aligned} \quad (1.33)$$

1. Calculer la solution exacte de (1.33).
2. Calculer la solution approchée par la méthode d'Euler avec un pas  $h = \frac{1}{4}$  constant.

On commence par la solution exacte.

1. Evidemment

$$y' = y \text{ implique } \frac{dy}{dt} = y \text{ donc } \int \frac{dy}{y} = \int dt$$

Alors

$$\ln |y| = t + C \text{ et } y(t) = Ce^t$$

La condition  $y(0) = y_0 = 1$  implique alors que la solution exacte est

$$y(t) = e^t.$$

2. On applique (1.32) pour un pas constant  $h$ , on obtient

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_i, y_i) = y_i + h y_i = y_i (1 + h); \quad i = 0, \dots, N - 1$$

Ainsi

$$y_1 = y_0 (1 + h) = (1 + h) \approx y(t_1).$$

$$y_2 = y_1 (1 + h) = (1 + h)^2 \approx y(t_2).$$

...

$$y_{i+1} = y_i (1 + h) = (1 + h)^{i+1} \approx y(t_{i+1}).$$

Si on prend  $h = \frac{1}{4}$  on obtient

$$y_1 = y_0 (1 + h) = (1 + h) = \frac{5}{4} = 1.25 \approx y(t_1) = e^{\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

$$y_2 = y_1 (1 + h) = (1 + h)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 1.5625 \approx y(t_2) = e^{\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

$$y_3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \approx y(t_3) = e^{\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$y_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 \approx y(t_4) = e.$$

On calcule l'erreur

$$E_i = |y(t_i) - y_i| = \left| e^{t_i} - (1 + h)^i \right|; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

## 7.2 La méthode de Runge-Kutta

Cette méthode calcule la valeur approchée de la solution du problème de Cauchy aux point  $t_i = t_0 + ih$  où  $h$  est le pas constant

$$h = \frac{T}{N}$$

et est définie par : Pour tout  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  on calcule

$$\begin{aligned} K_1^{(i)} &= hf(t_i, y_i) \\ K_2^{(i)} &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}\right) \\ K_3^{(i)} &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}\right) \\ K_4^{(i)} &= hf\left(t_i + h, y_i + K_3^{(i)}\right) \end{aligned}$$

et

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \left( K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)} \right)$$

**Exemple** On reprend le même exemple traité dans le cadre de la méthode d'Euler. Ainsi pour

$$\begin{aligned} i &= 0 \\ K_1^{(0)} &= hf(t_0, y_0) = hy_0 = \frac{1}{4} \\ K_2^{(0)} &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{8}, 1 + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{8}, \frac{9}{8}\right) = \frac{9}{32} \\ K_3^{(0)} &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right) = hf\left(\frac{1}{8}, 1 + \frac{9}{64}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{8}, \frac{73}{64}\right) = \frac{73}{256} \\ K_4^{(0)} &= hf\left(t_0 + h, y_0 + K_3^{(0)}\right) = hf\left(\frac{1}{4}, 1 + \frac{73}{256}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{8}, \frac{329}{256}\right) = \frac{329}{1024} \end{aligned}$$



et

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6} \left( K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + 2K_3^{(0)} + K_4^{(0)} \right) = 1.284016 \simeq y(t_1) = y\left(\frac{1}{4}\right) = e^{\left(\frac{1}{4}\right)} = 1.284025.$$

Pour

$$i = 1$$

$$K_1^{(1)} = hf(t_1, y_1) = hy_1 = 0.321004.$$

$$K_2^{(1)} = hf\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_1^{(1)}}{2}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{8}, 1.284016 + \frac{0.321004}{2}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{8}, 1.444518\right) = 0.361129.$$

$$K_3^{(1)} = hf\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_2^{(1)}}{2}\right) = hf\left(\frac{3}{8}, 1.284016 + \frac{0.361129}{2}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{8}, 1.464580\right) = 0.366145.$$

$$K_4^{(1)} = hf\left(t_1 + h, y_1 + K_3^{(1)}\right) = hf\left(\frac{1}{2}, 1.284016 + 0.366145\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}, 1.650161\right) = 0.412540.$$

et

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6} \left( K_1^{(1)} + 2K_2^{(1)} + 2K_3^{(1)} + K_4^{(1)} \right) = 1.648698 \simeq y(t_2) = y\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\left(\frac{1}{2}\right)} = 1.648721.$$

Pour

$$i = 2$$

$$K_1^{(2)} = hf(t_2, y_2) = hy_2 = 0.412174.$$

$$K_2^{(2)} = hf\left(t_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{K_1^{(2)}}{2}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{7}{8}, 1.854785\right) = 0.463696.$$

$$K_3^{(2)} = hf\left(t_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{K_2^{(2)}}{2}\right) = 0.470136.$$

$$K_4^{(2)} = hf\left(t_2 + h, y_2 + K_3^{(2)}\right) = 0.529708.$$

et

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{6} \left( K_1^{(2)} + 2K_2^{(2)} + 2K_3^{(2)} + K_4^{(2)} \right) = 2.116955 \simeq y(t_3) = y\left(\frac{3}{4}\right) = e^{\left(\frac{3}{4}\right)} = 2.117000.$$

Pour

$$i = 3$$

$$K_1^{(3)} = hf(t_3, y_3) = hy_3 = 0.529238.$$

$$K_2^{(3)} = hf\left(t_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{K_1^{(3)}}{2}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{7}{8}, 1.854785\right) = 0.595393.$$

$$K_3^{(3)} = hf\left(t_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{K_2^{(3)}}{2}\right) = 0.603662.$$

$$K_4^{(3)} = hf\left(t_3 + h, y_3 + K_3^{(3)}\right) = 0.680154.$$

et

$$y_4 = y_3 + \frac{1}{6} \left( K_1^{(3)} + 2K_2^{(3)} + 2K_3^{(3)} + K_4^{(3)} \right) = 2.718205 \simeq y(t_4) = y(1) = e = 2.718281.$$

## 8 Série d'exercices 3

Université Badji-Mokhtar-Annaba  
 Département Électrotechniques  
 Master I

Année 2020-2021

### Série 3 : Méthodes numériques pour les EDO du premier ordre

#### Exercice 1

## 8. Série d'exercices 3

---

1. Utiliser la méthode d'Euler en prenant  $h = 0.1$  pour résoudre le problème

$$\begin{cases} y' + 2y = x^3 e^{-2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

aux points 0.1; 0.2; 0.3.

2. Reprendre la même question pour les deux pas  $h = 0.05$  et  $h = 0.025$ .

3. Comparer les résultats avec la solution exacte  $y(x) = \frac{e^{-2x}}{4} (x^4 + 4)$ .

**Exercice 2** Reprendre les mêmes questions de l'exercice 1 pour les problèmes suivants

1.

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 + xy - x^2}{x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

La solution exacte est  $y(x) = e^{4x} + e^{-3x}$ .

2.

$$\begin{cases} y' + \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^3} + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Aux points  $x_1 = 1.1$ ;  $x_2 = 1.2$ ;  $x_3 = 1.3$ . La solution exacte est  $y(x) = \frac{1}{3x^2} (9 \ln x + x^3 + 2)$ .

**Exercice 3** Appliquer la méthode de Runge-Kutta

Pour  $i = 0, 1, 2, \dots$

$y_i$  étant connu, calculer

$$\begin{cases} k_{1i} = f(x_i, y_i) \\ k_{2i} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_{1i}\right) \\ k_{3i} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_{2i}\right) \\ k_{4i} = f(x_i + h, y_i + hk_{3i}) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}) \end{cases}$$

pour les problèmes des exercices 1 et 2.

## 8.1 Corrigé série 3