3. Logique Modale

- **Logique modale : extension de la logique propositionnelle**
  - **formalisation d'énoncés non factuels(non confirmés)**
  - **raisonnement sur l'incertain et les situations évolutives**

- **Principe de la logique modale**
  - **introduction de modalités pour la compréhension des formules**
  - **expressivité : entre la logique propositionnelle et la logique des prédicats**
  - **complexité calculatoire maitrisée**

Logique Modale

❑ Logique aléthique (aristotélicienne)

- **Notions de possibilités/nécessité**

•Nécessaire (il est nécessaire d'avoir A) : □ A

•Possible (il est possible d'avoir A) : ◊ A

•Non Nécessaire (il n'est pas nécessaire d'avoir A): ¬□A

•Impossible (il est impossible d'avoir A) : ¬ ◊ A

- **Equivalences entre les deux modalités**

□ A Ξ ¬ ◊ ¬ A

◊ A Ξ ¬ □ ¬ A

¬□A Ξ ◊ ¬ A

¬ ◊ A Ξ□¬ A

Logique Modale

❑ Logique épistémique

- **Notions de croyances**

•Savoir que A : $\Box A \; \Xi \; \neg \Diamond \neg A$

•Ne pas Savoir que A : $\neg \Box A \equiv \Diamond \neg A$

•Croire que A (A est compatible avec les croyances) :

$\Diamond A \; \Xi \neg \Box \neg A$

•Ne pas Croire que A : $\neg \Diamond A \equiv \Box \neg A$

Logique Modale: schémas d'axiomes

❑ Logique épistémique: exemples

- Tout ce que sait Mohamed, Ali le sait

  $\forall x.\ \Box(\text{Mohamed})x \rightarrow \Box(\text{Ali})x$

- Si quelqu'un sait qu'il gèle, alors il gèle

  $\exists x.\ \Box(x)\text{geler} \rightarrow \text{geler}$

❑ Schémas d'axiomes

- axiome K : $\Box\ (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box\ A \rightarrow B)$
- règle de nécessitation : $A \vdash \Box\ A$

Système S4 :

- axiome T : $A \rightarrow \Diamond\ A$
- axiome 4 : $\Box\ A \rightarrow \Box\ \Box\ A$

Système S5 : reprend S4 et ajoute l'axiome 5 : $\Diamond\ A \rightarrow \Box\ \Diamond\ A$

Logique modale propositionnelle

❑ Le langage de logique modale propositionnelle (Vocabulaire)

- **un ensemble infini dénombrable de propositions**
- **les constantes : 0 (Faux) et 1 (Vrai)**
- **les connecteurs ¬ , ∨, ∧, →, ↔**
- **les modalités □, ◊**

Logique modale propositionnelle

- **formules bien formées de la logique propositionnelle :**

- **0 et 1 sont des formules**
- **une variable propositionnelle est une formule**
- **si A et B sont des formules alors**
- **$\neg$ A, A $\vee$ B, A $\vee$ B, A$\rightarrow$ B, A $\leftrightarrow$ B sont des formules**
- **si A est une formule alors □ A, ◊ A sont des formules**
- **si A est une formule alors A =def $\neg$ □ $\neg$ A**

Logique temporelle

Intervalle, instant et évènement

Différentes logiques.. Ici présentations de Logique de Allen.
Nouveaux prédicats :

- holds(p; t) : p est vrai pendant l'intervalle t
- occurs(e; t) → Pt : t apparaît suite a l'évènement e implique que les préconditions nécessaires a t sont validées
- before : x < y : $(x^+_1 < x^-_2)$ x^-_1 x^+_1 x^-_2 x^+_2
- equals : x = y : $(x^-_1 = x^-_2) \wedge (x^+_1 = x^+_2)$
- meets : x m y : $(x^+_1 = x^-_2)$
- overlaps : x o y : $(x^+_1 > x^-_2) \wedge (x^+_1 < x^+_2)$
- during : x d y : $(x^-_1 > x^-_2) \wedge (x^+_1 < x^+_2)$
- starts : x s y : $(x^-_1 = x^-_2) \wedge (x^+_1 < x^+_2)$
- finishes : x f y : $(x^-_1 > x^-_2) \wedge (x^+_1 = x^+_2)$
- S4 axiomes. Exemple : $(x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z)$