Université Badji Mokhtar Annaba
Département d'électronique

TD 1
Master 1 Système de télécommunications
Convolution et corrélation

Rappels

1. Produit de convolution.

1.1 Définition pour des signaux analogiques

Soient deux signaux h(t) et g(t) appartenant à L^2 (Ensemble des signaux à Energie totale finie et puissance moyenne totale nulle), on appelle produit de convolution entre h(t) et g(t), le signal s(t) défini par :

$$s(t) = h(t) * g(t) = \int_D h(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Où D est le domaine de définition de h(t)

Physiquement un produit de convolution modélise l'effet d'un système linéaire et invariant par translation (SLIT). Ainsi, un SLIT dont la réponse impulsionnelle est h(t), quand il est excité à son entrée par un signal g(t) produit à sa sortie s(t) représentée par le produit de convolution entre l'entrée est la réponse impulsionnelle.

La sommation sous l'intégrale s'effectue sur la variable τ ce qui montre que le signal ainsi obtenu est une fonction de t et non pas un nombre comme c'est le cas lorsque l'on effectue un produit scalaire.

Pour calculer un produit de convolution en utilisant la formule ci-dessous, il faut conserver le premier signal, trouver le symétrique du second par rapport à l'axe des ordonnées puis décaler ce signal du temps t, multiplier les deux signaux obtenus et finalement intégrer le résultat.

1.2 Propriétés du produit de convolution

- Commutativité

$$s(t) = h(t) * g(t) = g(t) * h(t)$$

- Associativité

$$s(t) = (g(t) * h_1(t)) * h_2(t) = g(t) * (h_1(t) * h_2(t))$$

  Physiquement l'associativité de la convolution peut expliquer que deux systèmes SLIT en série (en cascade) peuvent être remplacés par un seul SLIT dont la réponse impulsionnelle est le produit de convolution des réponses impulsionnelles des deux SLIT originaux.

- Distributivité par rapport à l'addition et linéarité

$$s(t) = g(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = g(t) * h_1(t) + g(t) * h_2(t)$$

  Physiquement la Distributivité par rapport à l'addition de la convolution peut expliquer que deux systèmes SLIT en parallèle peuvent être remplacés par un seul SLIT dont la réponse impulsionnelle est somme des réponses impulsionnelles des deux SLIT originaux.

- Elément neutre l'impulsion de Dirac

$$s(t) = g(t) * \delta(t) = g(t)$$

$$s(t) = g(t) * \delta(t-\tau) = g(t-\tau)$$

Ainsi un SLIT dont la réponse impulsionnelle est un Dirac n'aura aucun effet sur le signal qui l'excite à son entrée car il va produire le même signal à sa sortie. Il s'agit dans ce cas d'un système idéal car tout système réalisable agit inévitablement sur le signal appliqué à son entrée.

- Transformée de Fourier d'un produit de convolution

$$TF(s(t)) = TF(h(t) * g(t)) = TF(g(t)) \times TF(h(t))$$

$$S(f) = H(f) \times G(f)$$

$$H(f) = \frac{S(f)}{G(f)}$$

H(f), S(f) et G(f) sont des fonctions complexes. Dans le cas d'un SLIT, H(f) est appelée réponse fréquentielle.

2. Fonctions de Corrélation.

2.1 Définitions

- **Cas des signaux à énergie totale finie (puissance moyenne totale nulle) :**

Soient deux signaux analogiques s(t) et r(t) d'énergie finie ; on appelle fonction de corrélation entre ces deux signaux, la fonction de τ définie par :

$$\Gamma_{sr}(\tau) = s(t) \otimes r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) r^*(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t+\tau) r^*(t) dt$$

Ici * représente le conjugué du signal ou de la fonction.

Si le signaux sont réel alors on peut écrire :

$$\Gamma_{sr}(\tau) = s(t) \otimes r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) r(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t+\tau) r(t) dt$$

Cette fonction s'appelle aussi fonction d'intercorrélation entre les signaux s(t) et r(t). Elle permet de comparer un signal de référence s(t) par rapport à un autre signal r(t) décalé d'un paramètre τ pouvant varier de $-\infty$ à $+\infty$.

Physiquement la fonction de corrélation est obtenue en décalant l'un des signaux, en multipliant le signal décalé par l'autre signal et puis en intégrant le produit obtenu.

Si le signal s(t)=r(t) quel que soit t alors on obtient la fonction d'autocorrélation du signal soit :

$$\Gamma_{ss}(\tau) = s(t) \otimes s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s(t-\tau)dt$$

L'autocorrélation peut être calculée à partir d'un produit de convolution

$$\Gamma_{ss}(\tau) = s(t) * s(-t)$$

Dans le cas particulier ou τ est nul, la fonction d'autocorrélation du signal donne :

$$\Gamma_{ss}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s(t)dt$$

qui n'est rien d'autre que l'énergie contenue dans le signal. On peut démontrer que la fonction d'autocorrélation vérifie

$$\Gamma_{ss}(\tau) \leq \Gamma_{ss}(0)$$

De même la fonction d'autocorrélation est paire par rapport à τ :

$$\Gamma_{ss}(\tau) = \Gamma_{ss}(-\tau)$$

La Transformée de Fourier d'une fonction d'autocorrélation nous donne dans ce cas (signaux à énergie totale finie) la densité spectrale d'énergie DSE notée $\Phi_{ss}(f)$

$$\Phi_{ss}(f) = TF(\Gamma_{ss}(\tau))$$

La densité spectrale d'énergie est la dispersion de l'énergie d'un signal par unité de fréquence.

- **Cas des signaux à énergie totale infinie et puissance moyenne totale finie :**

Si les signaux ne sont pas à énergie finie mais à puissance moyenne finie, on définit la fonction d'intercorrélation sur un intervalle T par :

$$\Gamma_{sr}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t)r(t-\tau)dt$$

Et la fonction d'autocorrélation par :

$$\Gamma_{ss}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t)s(t-\tau)dt$$

La Transformée de Fourier d'une fonction d'autocorrélation nous donne dans ce cas (signaux à puissance moyenne finie) la densité spectrale de puissance DSP notée $\Phi_{ss}(f)$

$$\Phi_{ss}(f) = TF(\Gamma_{ss}(\tau))$$

La densité spectrale de puissance est la dispersion de la puissance d'un signal par unité de fréquence.

Exercice 1 :

Soit le signal échelon $f(t)= E_0\ U(t)$, d'amplitude E_0.
Représenter graphiquement et calculer le produit de convolution de $f(t)$ par lui-même (auto-convolution).

Exercice 2 :

On définit la fonction *Rect* par :

$$f(t) = Rect(t/\tau) = \begin{cases} 1 \ \text{si}\ t \in [-\tau/2, +\tau/2] \\ \quad 0 \ \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, pour un rectangle centré sur «*t=centre*», de hauteur 1 et d'une largeur donnée par «*largeur*», on utilisera la notation :

$$Rect(\frac{t - centre}{largeur})$$

Soit les fonctions *f* et g définies par :

$$f(t) = 3\ Rect(t\text{-}1/2)\text{+}Rect((t\text{-}2)/2)$$
$$g(t) = Rect(t/2)$$

Trouver la convolution $f * g$.

Exercice 3 :

Soit les fonctions *f* et g définies par :

$$f(t) = \begin{cases} -e^{\beta t} \ \text{pour}\ t < 0 \\ \ 0 \ \text{pour}\ t > 0 \end{cases}$$

$$g(t) = Rect(t - 1/2)$$

Représenter *f* et *g* puis donner les expressions analytiques de la convolution dans les différentes régions de définition.

Exercice 4 :

1) Montrer que l'opération de moyenne mobile (ou glissante) est une convolution avec la fonction rectangulaire.
2) Exprimer la réponse impulsionnelle correspondante.

Exercice 5 :

1) Déterminer la réponse indicielle (réponse à un signal échelon de Heaviside) d'un circuit RC dont la réponse impulsionnelle est définie par :

$$h(t) = \frac{1}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

avec $t \geq 0$ (0 pour $t<0$).

2) Représenter cette réponse impulsionnelle ainsi que la réponse du circuit.

Exercice 6 :

Calculer la réponse d'un circuit RC à une rampe de pente 1, à partir de sa réponse impulsionnelle.

Exercice 7 :

Calculer f*g avec :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

Exercice 8 (corrélation) :

1) Calculer la fonction d'autocorrélation d'un signal porte défini par

$$x(t) = \mathrm{rect}\left[(t - T/2)/T\right]$$

2) Conclure sur les propriétés de la corrélation utiles pour la mesure de ressemblance.

3) Déterminer l'énergie de ce signal à partir de sa fonction d'autocorrélation.

4) Calculer la fonction d'autocorrélation du signal carré obtenu par répétition de la fonction porte à tous les instants kT', avec T'=2T et k entier.

5) Montrer quand dans ce dernier cas, la borne inférieure de l'intégrale peut être différente de la valeur choisie dans la question précédente.

Exercice 9 (corrélation) :

Soit un signal défini par :

$$x(t) = \frac{A}{T} t\left[u(t) - u(t - T)\right]$$

1) Représenter ce signal.

2) Calculer sa fonction d'autocorrélation, et la représenter.

3) Déterminer son énergie à partir de sa fonction d'autocorrélation.

Exercice 10 (corrélation) :

Calculer la fonction d'autocorrélation du signal sinusoïdal.

Exercice 11 (corrélation discrète) :

1) On considère le signal long suivant, sous la forme d'une séquence $\{x_n\}$, où n représente les indices des éléments dans la séquence, commençant à 0 :

```
signal long :    1   0   1   2   1   2   2   0   0
```

Et le signal court sous la forme d'une séquence $\{y_n\}$:

```
signal court :   0   1   2
```

On cherche à détecter la présence du signal court dans le signal long. Pour cela, on définit le produit de corrélation de la manière suivante :

$$C_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_{i+k} \cdot y_i$$

où N est le nombre d'éléments du signal court : N=3.

1) Calculer le produit de convolution pour k=0, k=1 et k=4.

2) Par interprétation de ces résultats, indiquer si la détection de la ressemblance entre les 2 signaux est bien effectuée de cette manière.

3) Recommencer avec les versions centrées des signaux (pour chacun, la moyenne de ses éléments est retranchée de chaque élément) :

```
signal long :    0  -1   0   1   0   1   1  -1  -1
signal long :   -1   0   1
```

4) Même question que 2) pour les résultats du 3).

5) Conclure sur l'utilité de centrer les signaux pour rechercher des motifs dans un signal par corrélation, et ré-écrire l'expression de la fonction de corrélation prenant en compte ce centrage.