Correction travaux dirigés N° 4

Transformée de Laplace

Exercice 01 :

1. $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \frac{1}{p}$
2. $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} te^{-pt}dt$

   On utilise l'intégrale par partie :

   On pose $\begin{cases} u = 1 \\ v' = e^{-pt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = \frac{-1}{p}e^{-pt} \end{cases}$

$$F(p) = \left[-\frac{t}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = 0 + \frac{1}{p}.\frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}$$

3. $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-at}\, e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}\, dt =$

$$\left[-\frac{1}{p+a}e^{-(p+a)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a}$$

4. On pose ;

$$f(t) = \cos(\omega t)\, U(t)$$

$$g(t) = \sin(\omega t)\, U(t)$$

D'après la formule d'Euler, on a : $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$

$$L\left(e^{j\omega t}\right)$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{j\omega t}e^{-pt}dt$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{(-p+j\omega)t}dt = \frac{1}{p - j\omega} = \frac{(p + j\omega)}{(p - j\omega)(p + j\omega)}$$
$$= \frac{p}{p^2 + \omega^2} + j\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

D'autre part :

$$L\left(e^{j\omega t}\right) = L\left(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right) = F(p) + jG(p)$$

Par identification, on aura :

$$L\,(\cos(\omega t)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$L\,(\sin(\omega t)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Exercice 2 :

1. $S(p) = \frac{p^2+2p+4}{p^3+3p^2+2p}$

   $$\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to+\infty} pS(p) = \lim_{p\to+\infty} p\ \frac{p^2+2p+4}{p^3+3p^2+2p} = \lim_{p\to+\infty} \frac{p^3}{p^3} = 1$$

   $$\lim_{t\to+\infty} s(t)$$
   $$= \lim_{p\to 0} pS(p)$$
   $$= \lim_{p\to 0} p\ \frac{p^2+2p+4}{p^3+3p^2+2p} = \lim_{p\to 0} \frac{p}{p}\left(\frac{p^2+2p+4}{p^2+3p\ +2}\right) = 2$$

2. $S(p) = \frac{p^3+2p^2+6p+8}{p^3+4p}$

   $$\lim_{t\to 0} s(t) = \lim_{p\to+\infty} pS(p) = \lim_{p\to+\infty} p\ \frac{p^3+2p^2+6p+8}{p^3+4p} = +\infty$$

   $$\lim_{t\to+\infty} s(t)$$
   $$= \lim_{p\to 0} pS(p)$$
   $$= \lim_{p\to+0} p\ \frac{p^3++6p+8}{p^3+4p2p^2} = \lim_{p\to+0} \frac{p}{p}\left(\frac{p^3+2p^2+6p+8}{p^2+4}\right) = 2$$

Exercice 3 :

1. $F(p) = \frac{p-8}{(p-8)^2+25} = \frac{p-8}{(p-8)^2+25}$

   $$\Rightarrow f(t) = L^{-1}\big(f(p)\big) = (e^{8t}\cos(5t))U(t)$$

2. $H(p) = \frac{p+1}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+2^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{p^2+2^2}$

   $$\Rightarrow h(t) = L^{-1}\big(H(p)\big) = \left(\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)U(t)$$

3. $M(p) = \frac{p-2}{(p-2)^2+4} = \frac{p-2}{(p-)^2+2^2}$

$$\Rightarrow m(t) = L^{-1}\big(M(p)\big) = (e^{2t}\cos(2t))U(t)$$

4. $G(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p^2+1^1}$

$$\Rightarrow g(t) = L^{-1}\big(G(p)\big) = (te^{-t} + \sin(t))U(t)$$

Exercice 4 :

1. $\boldsymbol{y'' + 4y' + 3y = 6}$

En appliquant la transformée de Laplace ; (les conditions initiales sont nulles)

$$p^2Y(p) + 4pY(p) + 3Y(p) = \frac{6}{p}$$

$$Y(p)(p^2 + 4p + 3) = \frac{6}{p}$$

$$Y(p) = \frac{6}{p(p^2 + 4p + 3)} = \frac{6}{p(p+1)(p+3)}$$

Puisque $p^2 + 4p + 3 = (p+1)(p+3)$; on aura:

$$Y(p) = \frac{6}{p(p+1)(p+3)}$$

$$Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+3}$$

$$A = \lim_{p\to 0}(pY(p)) = \lim_{p\to 0}\left(p\frac{6}{p(p+1)(p+3)}\right) = 2$$

$$B = \lim_{p\to -1}((p+1)Y(p)) = \lim_{p\to -1}\left((p+1)\frac{6}{p(p+1)(p+3)}\right) = -3$$

$$C = \lim_{p\to -3}((p+3)Y(p)) = \lim_{p\to -3}\left((p+3)\frac{6}{p(p+1)(p+3)}\right) = 1$$

$$Y(p) = \frac{2}{p} - \frac{3}{p+1} + \frac{1}{p+3}$$

$$y(t) = L^{-1}\big(Y(p)\big) = (2 - 3e^{-t} + e^{-3t})U(t)$$

2. $\boldsymbol{y'' + 3y' + 2y = 1}$

En appliquant la transformée de Laplace ;

$$p^2Y(p) + p - 2 + 3pY(p) + 3 + 2Y(p) = \frac{1}{p}$$

$$(Yp)(p^2 + 3p + 2) + p + 1 = \frac{1}{p}$$

$$(Yp)(p^2 + 3p + 2) = \frac{1}{p} - p - 1 = \frac{1 - p^2 - p}{p}$$

$$(Yp) = \frac{1 - p^2 - p}{p(p^2 + 3p + 2)}$$

Sachant que : $p^2 + 3p + 2 = (p+1)(p+2)$; on peut écrire Y(p) sous la forme :

$$Y(p) = \frac{1 - p^2 - p}{p(p+1)(p+2)}$$

On décomposant Y(p) en somme de fractions élémentaires ;

$$Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2}$$

Avec :

$$A = \lim_{p\to 0}(pY(p)) = \lim_{p\to 0}\left(p\frac{1 - p^2 - p}{p(p+1)(p+2)}\right) = \frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{p\to -1}((p+1)Y(p)) = \lim_{p\to -1}\left((p+1)\frac{1 - p^2 - p}{p(p+1)(p+2)}\right) = -1$$

$$C = \lim_{p\to -2}((p+2)Y(p)) = \lim_{p\to -2}\left((p+2)\frac{1 - p^2 - p}{p(p+1)(p+2)}\right) = \frac{-1}{2}$$

On obtient :

$$Y(p) = \frac{1}{2p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2(p+2)}$$

$$y(t) = L^{-1}\big(Y(p)\big) = \left(\frac{1}{2} - e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right)U(t)$$

Exercice 5 :

$$f(t) = f_0(t) + f_0(t-T) + f_0(t-2T) + \cdots + f_0(t-nT)$$

$$L(f(t)) = L((f_0(t)) + L(f_0(t-T)) + L(f_0(t-2T)) + \cdots + L(f_0(t-nT))$$

$$F(p) = F_0(p) + e^{-Tp}F_0(p) + e^{-2Tp}F_0(p) + \cdots + e^{-nTp}F_0(p)$$

$$= F_0(p)(1 + e^{-Tp} + e^{-2Tp} + \cdots + e^{-nTp})$$

$(1 + e^{-Tp} + e^{-2Tp} + \cdots + e^{-nTp})$ représente la somme d'une suite géométrique de raison e^{-pT} et de premier terme 1.

$$1 + e^{-Tp} + e^{-2Tp} + \cdots + e^{-nTp} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1 - e^{-(n+1)Tp}}{1 - e^{-pT}}\right) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}}$$

Donc ;

$$F(p) = F_0(p)\frac{1}{1 - e^{-Tp}}$$

Exercice 6 :

Dans ce cas $f_0(t) = u(t) - u(t - \tau)$

Et ;

$$F_0(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-\tau p} = \frac{1}{p}(1 - e^{-\tau p})$$

$$F(p) = F_0(p)\frac{1}{1 - e^{-pT}} = \frac{1}{p}\frac{(1 - e^{-\tau p})}{1 - e^{-Tp}}$$

Exercice (+)

Soit la fonction de transfert suivante :

$$F(p) = \frac{4p}{p^2(p + 2)}$$

Déterminer la fonction $f(t)$

Solution

On peut écrire :

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{(p + 2)}$$

Avec ;

$$A = \lim_{p\to+\infty}(pF(p)) = \lim_{p\to+\infty}\left(p\frac{4p}{p^2(p + 2)}\right) = \frac{1}{2}$$