Université Badji Mokhtar Annaba
Faculté des sciences de l'ingéniorat
Département d'Electronique
Master 1 Automatique et Informatique Industrielle

TP Systèmes Non Linéaires

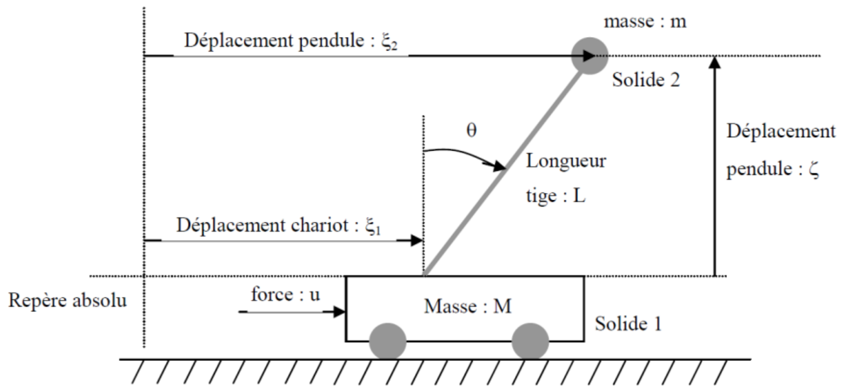
TP N°1 ''Simulation avancée sur Matlab : modélisation du système pendule inversé''

I. Rappels :

Soit un système d'entrée u et de sortie y, si pour la combinaison des signaux d'entrées $\alpha.u_1 + \beta.u_2$ correspond la combinaison des signaux de sorties $\alpha.y_1 + \beta.y_2$, alors le système est linéaires, sinon il est non linéaire.

II. Exemple : Le pendule inversé

Il s'agit d'un système non linéaire bien connu constitué d'une tige surmontée d'une masse articulée en rotation dans un plan, et portée par un chariot en translation, sur lequel on exerce une force u (voir la figure ci-dessous). L'objectif est de garder la tige en équilibre.



II.1. Modélisation non linéaire du pendule inversé

- Trouver le modèle non linéaire du pendule inversé en utilisant l'approche Lagrangienne ?

Rappel : Equation d'Euler - Lagrange

- n degrés de libertés indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_n$ représentant les positions
- On y adjoint les coordonnées de vitesse $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$
- On forme le Lagrangien : $L(q, \quad \dot{q}) = T(q_1, q_2, \ldots, q_n, \quad \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) - V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$
- T est l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$ où M est une matrice symétrique > 0 composée des termes inertiels
- V est l'énergie potentielle
- Les équations d'Euler - Lagrange sont : $\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}\right)(q, \dot{q}) - \left(\frac{\delta L}{\delta q_i}\right)(q, \dot{q}) = u_i \quad i = 1.n, \quad \frac{dq}{dt} = \dot{q} \right.$

où u_i sont les forces et couples externes au système.

Ces équations forment un système de n équations différentielles du second ordre.

Aide : Energie cinétique $T = \frac{1}{2}M\dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{\xi}_2^2 + \dot{\zeta}^2\right)$, Energie potentielle $V = mg\zeta$.

Degrés de liberté : $q_1 = \xi_1$ et $q_2 = \theta$, on en déduit le Lagrangien en fonction de $q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2$

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\left(\dot{\xi}_1 + \dot{\theta}l\cos\theta\right)^2 + \left(-l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right) - mgl\cos\theta$$

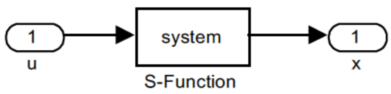
Réponse :

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{\xi}_1 + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta - 0 = u \\ ml\ddot{\xi}_1\cos\theta - m\,\mathrm{lg}\sin\theta + ml^2\ddot{\theta} = 0\end{cases}$$

A N : m = 0.1 kg, M = 2 kg, L = 0.5 m, g = 9.81 m/s^2

II.2. Modélisation sous MATLAB/SIMULINK (utilisation des S-Function)

Rappel : Les S-fonctions permettent, sous Simulink, la simulation de systèmes représentés par des équations d'état avec des états continus et/ou discrets.



Exemple : Soit un système non linéaire dont les équations d'état sont données par :

$$\begin{cases}\dot{x} = (2x+1)u^2 \\ y = x\end{cases}$$

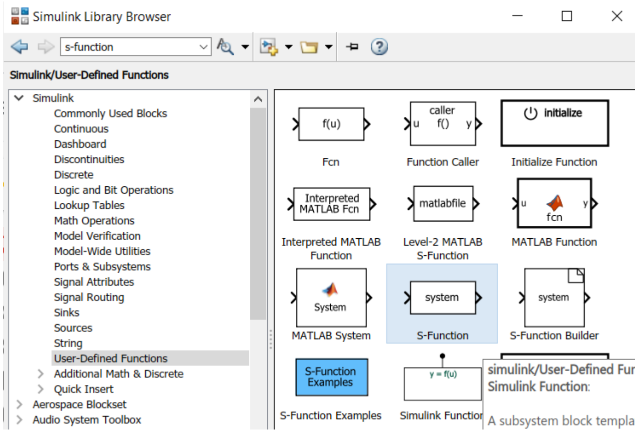
Ce modèle pourra être simulé sous simulink dans un bloc 'S-function' avec la fonction suivante sauvegardée dans model.m :

```
function [sys,x0]=model(t,x,u,flag),

if flag==0, % Initialisation
   sys=[1 0 1 1 0 0]; % nbre d'états continus, nbre d'états discrets,
nbre de sorties, nbre d'entrées
   x0 = 0; % valeur initiale des états

elseif flag==1, % calcul de dx/dt
   sys=(2*x+1)*u^2;

elseif flag==3, % calcul des sorties
   sys=x;

else
   sys=[];

end
```

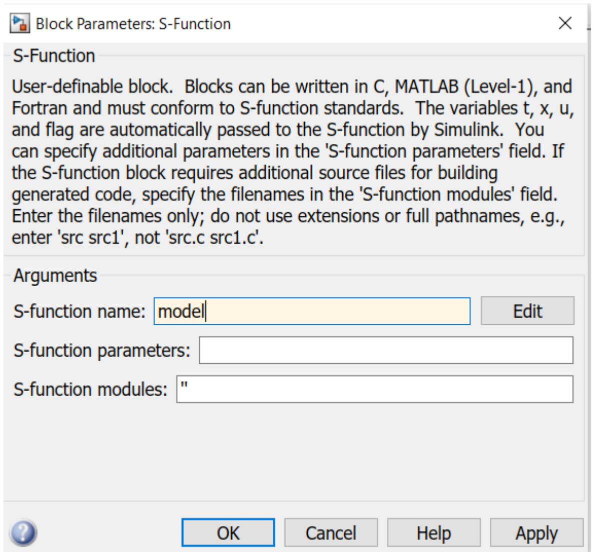
1- Créer cette fonction sous Matlab

2- Insérer cette fonction dans une S-function sous SIMULINK et simuler la réponse indicielle du système :

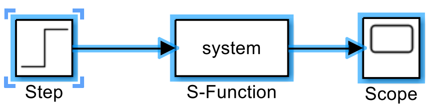
- ➢ Aller à la bibliothèque « User-Defined Functions »



- ➢ Double cliquer sur la S-function et spécifier le nom de la fonction dans la boite de dialogue



- ➢ Enfin, réaliser :



II.3. Travail à faire :

1- Créer une fonction représentant le modèle d'état du pendule inversé sous matlab (pendule.m)

2- Créer une S-function pour cette fonction et simuler la réponse indicielle du système