Chapitre 2

Introduction

Transformation géométrique

Représentation

Types de transformation linaire

Transformations Linéaires

2.1 Introduction

Les transformations géométriques sont des fonctions élémentaires de manipulation graphique. Les transformations usuelles sont :

- Translation.
- Rotation.
- Changement d'échelle.

On trouve aussi des transformations affines et projectives largement utilisées pour les images.

2.2 Transformation géométrique

Une transformation géométrique repositionne un point d'un espace à un autre. Elle consiste donc, à déterminer les nouvelles valeurs de coordonnées spatiales d'un point.

(x', y', z')= (x, y, z)

Ses transformations peuvent prendre une forme linéaire simple ou une forme non linéaire plus complexe. Ce chapitre présente les transformations linéaires basées sur les opérations de matrices.

Dans la suite de ce chapitre on donne un intérêt particulier à l'espace 2D.

2.3 Représentation

Un point est défini dans un espace 2D par ses coordonnées (x, y), représentés par un vecteur soit de forme Tapez une équation ici.

Verticale p$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Horizontal p$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$

Une transformation 2D est représentée par une matrice

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

La transformation d'un point p vers un point p' est possible selon deux formules

Formule 1 : $p' = Tp \leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Formule 2 : $p' = pT^t \leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ d & d \end{bmatrix}$

La formule 1 indique un changement de repère qui peut être exprimé par :

$$p' = Tp = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x.\boldsymbol{u} + y.\boldsymbol{v}$$

Avec $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix}^T$ et $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} b & d \end{bmatrix}^T$ des vecteurs qui définissent une nouvelle base d'un espace linaire. Ce changement de base est dit ***transformation linaire***.

Dans tout le long de ce cours on utilisera la première formule qui permet de calculer les coefficients (x' y') comme suit :

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

2.4 Types de transformation linaire

Selon les valeurs de la matrice de transformation T, il est possible de générer plusieurs transformations :

Identité :

La matrice identité est définie par : $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice identité n'introduit aucune transformation à l'objet traité. En d'autres termes le point ne se déplace pas et garde sa position.

Changement d'échelle :

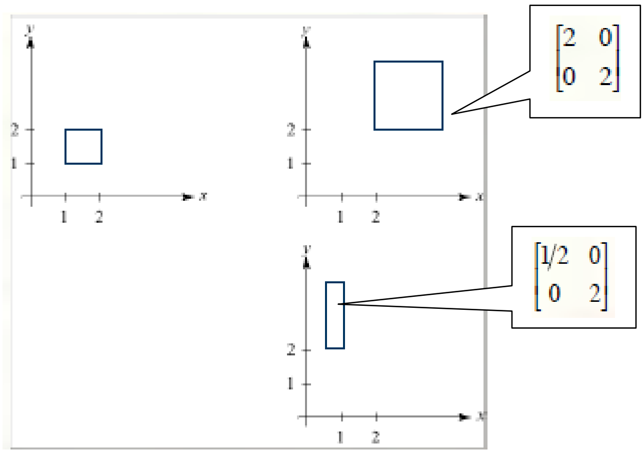
Le changement d'échelle est la transformation où la matrice T prend la forme

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

C'est-à-dire b=c=0 et a et d sont des valeurs positives. Le nouveau point est déterminé par :

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = dy \end{cases}$$

Illustration

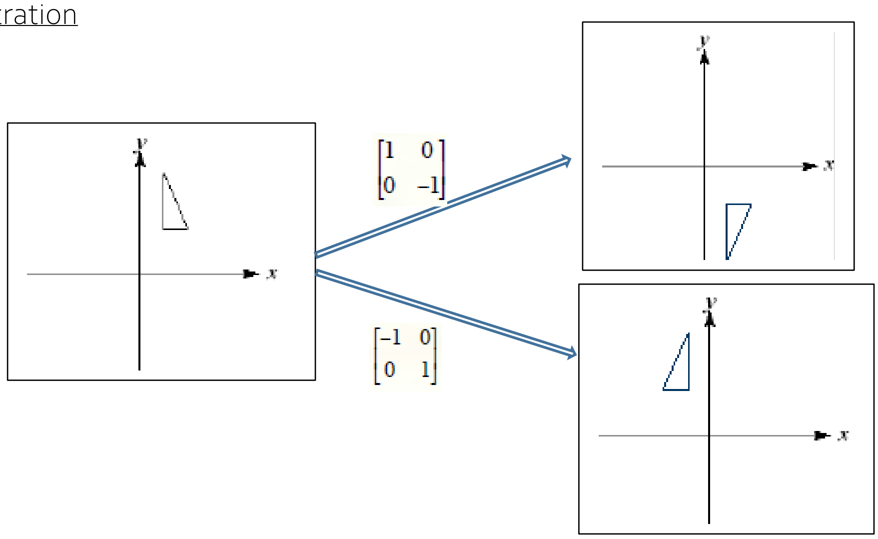


Réflexion :

La réflexion est la transformation où la matrice T prend la forme

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$ avec a=-1 ou/et d=-1.

Illustration



Inclinaison :

Dans le cas où les valeurs de a et d sont fixées à un (1) et les valeurs de b et c sont variables les formes géométriques subissent un autre type de transformation. Dans ce cas la matrice T prend la forme

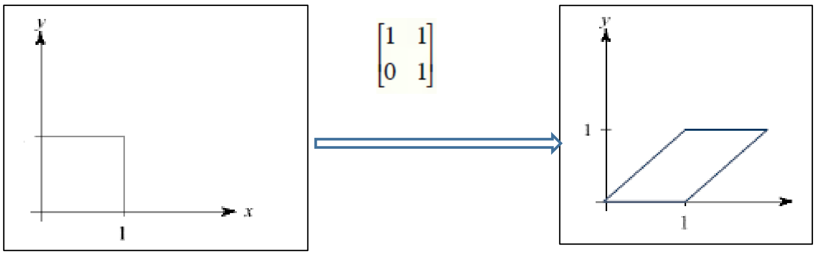
$$T = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x' = x + by \\ y' = cx + y \end{cases}$$

Supposant maintenant que c=o et b=1 alors on a

$$\begin{cases} x' = x + by \\ y' = y \end{cases}$$

Ce qui revient à appliquer une inclinaison dans le sens horizontale de la forme géométrique comme le montre l'illustration suivante où b=1:

<u>Illustration</u>



Rotation :

La rotation est une transformation qui consiste à pivoter la forme géométrique par rapport à un point et dans une direction donnée. Le pivotement est selon un angle donné. Dans ce cas la matrice T prend la forme

$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \; avec\ \theta\ l'angle\ \ de\ \ pivotement$$

<u>Illustration</u>