Université Badji Mokhtar Annaba
Faculté des sciences de l'ingéniorat
Département d'Electronique
Master 1 Automatique et Informatique Industrielle

TP Systèmes Non Linéaires

TP N°2 ''Linéarisation autour d'un point d'équilibre : application sur le modèle non linéaire du pendule inversé''

I. Rappels : Sois le modèle d'un système non linéaire :

$$\dot{X}(t) = f\big(X(t)\big) + g(X(t))u(t)$$

- Linéariser ce modèle autour d'un point d'équilibre $X_0 = [x_{10}\ x_{20}\ x_{30}\ x_{40}]^T$ consiste au développement en série de Taylor des champs de vecteur $f\big(X(t)\big)$ et $g(X(t))$ autour de ce point (les termes d'ordre supérieur à deux sont négligés). Ceci donnera lieu à un système linéaire (valide pour de petites variations de X(t) autour de X_0) donné par l'équation d'état suivante :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$$

- ✓ La matrice d'état A est la jacobéenne de $f\big(X(t)\big)$ par rapport à X évaluée au point d'équilibre
- ✓ Les éléments du vecteur de commande B représentent les valeurs prises par $g(X(t))$ au point d'équilibre.

II.1. Travail à faire :

Sois le modèle non linéaire du pendule inversé :

$$\dot{X}(t) = f\big(X(t)\big) + g(X(t))u(t)$$

Avec : $f\big(X(t)\big) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ \frac{gsin(x_3)}{l} \end{pmatrix} \quad et \quad g\big(X(t)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-cos(x_3)}{l} \end{pmatrix}$

1- Trouvez le modèle linéarisé autour du point d'équilibre : $X_0 = [0\ 0\ 0\ 0]^T$
2- Simulez ce modèle sous SIMULINK (réponse indicielle)
3- Mêmes questions pour le point d'équilibre : $X_0 = [0.5\ 0\ 45\ 0]^T$
4- Comparez les réponses indicielles des modèles linéarisés avec celle du modèle non linéaire obtenu au TP1.
5- Mentionnez vos commentaires et conclusion

Eléments de réponse :

- ✓ *Le développement en série de Taylor :*

Taylor series expansion represents an analytic function f (x) as an infinite sum of terms around the expansion point x = a :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \cdot (x-a)^m$$

- ✓ *La Jacobienne*

The Jacobian matrix of the vector function $f = (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n))$ is the matrix of the derivatives of f:

$$J(x_1, \dots x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- ✓ Pour le calcul de l'expression en série de Taylor et la Jacobienne, utilisez le langage Symbolique de MATLAB (Symbolic Math Toolbox)
- ✓ Dans ce TP, nous avons utilisé (comme illustration) une version simplifiée du modèle non linéaire du pendule inversé. Dans votre rapport utilisez plutôt la version originale c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{-mg\cos(x_3)\sin(x_3) + mlx_4^2\sin(x_3)}{M + m\sin^2(x_3)} \\ x_4 \\ \frac{(M+m)g\sin(x_3) - mlx_4^2\cos(x_3)\sin(x_3)}{(M + m\sin^2(x_3))l} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M + m\sin^2(x_3)} \\ 0 \\ \frac{\cos(x_3)}{(M + m\sin^2(x_3))l} \end{pmatrix} f$$