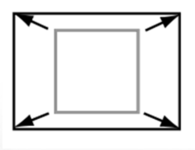
CHAPITRE 3

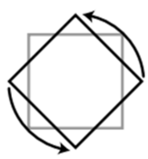
Géométrie Affine

Introduction

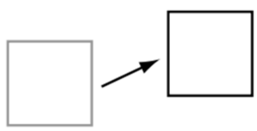


Changement d'échelle

Cisaillement



Rotation

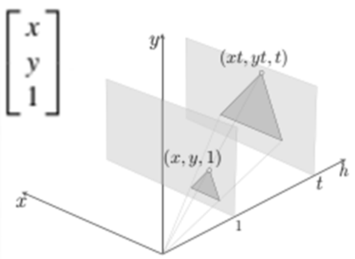


Translation

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

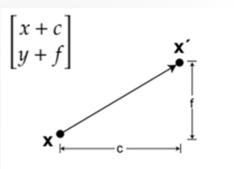
Coordonnées homogènes

- Les coordonnées homogènes définissent un point en utilisant trois (3) coordonnées à la place de deux (2)



La translation

- La translation est une **transformation isométrique** qui consiste à déplacer un objet en le glissant :
  - de gauche à droite ou/et de haut en bas
  - sur une certaine distance
  - sans modifier son orientation; l'objet conserve les **mêmes caractéristiques** (mesures de côtés et d'angles).



Coordonnées Homogènes

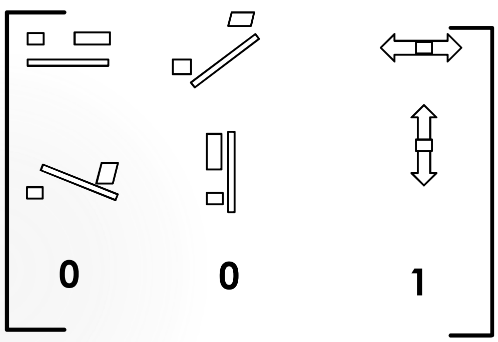
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y + T_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + T_y \cdot 1 \\ 0 + 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformations Affines

Combine la transformation linéaire avec la translation

$$\left.\begin{array}{c}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ + \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tx \\ ty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + tx \\ y + ty \end{bmatrix}\end{array}\right\} = \quad p' = Tp = \begin{bmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = ax + by + t_x \\ y' = cx + dy + t_y \end{cases}$$

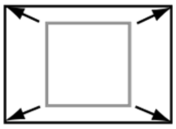
Transformations Affines



$$\begin{bmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

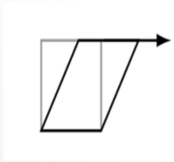
Transformations Affines

Changement d'échelle



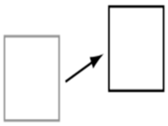
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cisaillement



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

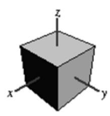
Translation



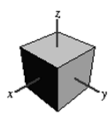
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformations Affines

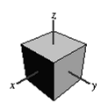
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_Z(\phi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\phi + y\sin\phi \\ -x\sin\phi + y\cos\phi \\ z \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_X(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos\theta + z\sin\theta \\ -y\sin\theta + z\cos\theta \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_Y(\gamma) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\gamma - z\sin\gamma \\ y \\ x\sin\gamma + z\cos\gamma \end{pmatrix}$$



Toute rotation consiste est une composition des trois rotations.

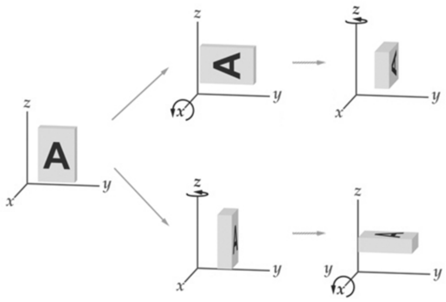
Transformations Affines

Remarque: La multiplication matricielle n'est pas commutative.

Exemple:

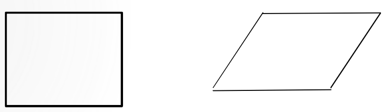
Cas1: Tourner autour de l'axe *X* de 90° et ensuite autour de l'axe *Z* de 90°
Cas 2: Tourner autour de l'axe *Z* de 90° et ensuite autour de l'axe *X* de 90°

Le résultat n'est pas le même



Transformations Affines

- Propriétés
  - L'origine ne change pas forcement vers l'origine
  - Les lignes se transforment en lignes
  - Les lignes parallèles restent parallèles



Application

Dans le plan affine, on considère la translation T de vecteur (1, 3) et la rotation R de centre (-2; 2) et d'angle π/6.

1. Donner la matrice homogène A associée a la transformation affine T.
2. Donner la matrice homogène B associée a la transformation affine R.
3. Calculer M.
4. Quelle est l'image du point X(-3,1) par cette opération ?