II- ENSEMBLES ET APPLICATIONS

1. ENSEMBLES
   1. On appelle **ensemble** toute collection d’objets que l’on appelle **éléments**, on note souvent un **ensemble** par une majuscule (**,**  , , , , **….**) et un **élément** par une minuscule —(,,,…).

* Si est un élément d’un ensemble, on dit que appartient à et on écrit et , si n’appartient pas à .
* Si est l’ensemble des éléments on écrit et si est l’ensemble des éléments vérifiant une propriété , on écrit .

Exemple1 :

SI alors

* L’ensemble auquel n’appartient aucun élément est appelé ensemble vide et est noté .
* Un ensemble est dit **inclus** dans un ensemble si tout élément de appartient à et on écrit . On dit également que est un **sous-ensemble** ou une **partie** de . Si n’est pas inclus dans on écrit .

Exemple2 :

, alors on a

* L’ensemble de toute les parties d’un ensemble est l’ensemble auquel appartiennent, entre autres et il est noté .

Exemple3

Pour , on a .

* Si et , on dit que les ensembles et sont égaux et on écrit .

Exemple4

, on a

* 1. Opérations sur les ensembles

Soit 2 ensembles :

* **Intersection :** on appelle **intersection** de et et on note par l’ensemble =.
* **Union :** On appelle **union**  de et et on note par l’ensemble .
* **Complémentaire :** Si , on appelle **complémentaire** de dans et on note par , l’ensemble .
* **Différence :** On appelle **différence** entre et et on note par , l’ensemble

.

* **Différence symétrique :** On appelle **différence symétrique** de et et on note par , l’ensemble .
* **Produit cartésien :** On appelle **produit cartésien** de A et B et on note par , l’ensemble des couples ordonnés Pour des ensembles , on définit de même

, si , on écrit .

Par exemple : ,

Exemple5 :

Pour , , on a , , , , ,

.

* 1. Propriétés

Soit 3 parties d’un ensemble  on a:

* ,

, ,

,

, ,







.

* .

1. APPLICATIONS
   1. Soit 2 ensembles, on appelle **application** de dans ou de sur toute correspondance entre les éléments de et les éléments de où à chaque élément de on associe un et un seul élément de , on note souvent une application par

* Si est une application de sur , on écrit et on dit que est l’ensemble de **départ** de et que est son ensemble d’**arrivée.**
* Pour si on dit que est l’**image** de par et que est un **antécédent** de
* Le **graphe** d’une application noté est l’ensemble .
* L’application **identique** ou **identité** d’un ensemble dans lui-même notée est l’application : définie par .
* 2 applications : et g : sont **égales** si

Exemple1

Soit , et , une application définie par : , alors

est l’ensemble des antécédents de . est l’ensemble des antécédents de . est l’ensemble des antécédents de . est l’ensemble des antécédents de . est l’ensemble des antécédents de .

2.2. Image directe et image réciproque :

Soit 2 ensembles ; 2 parties, , et une application

* On appelle **image directe** de par et on note l’ensemble

.

* On appelle **image réciproque** de par et on note l’ensemble .

Exemple2

Reprenons l’exemple1 et soit , , alors

; ={1,2,4 ,5,6}.

Propriétés :

* ; (AB).
* .

3.3. Prolongement et restriction

Soit et , une application, on appelle **prolongement**  deà toute application qui vérifie , . Et si est une application on appelle **restriction** de à l’application :, vérifiant ,

Exemple3 :

Soit , définie par , alors telle que si et si est un prolongement à de .

Soit définie par si et si , alors

L’application telle que est une restriction de à et l’application telle que est une restriction de à .

3.4. Composition des applications

Soit 3 ensembles et , 2 applications, la **composée** de et notée est l’application définie par

Exemple4

Soit , définies par, , on a

Remarques

* , en général.
* , pour toutes applications .

Applications **injectives, surjectives** et **bijectives**

Soit , une application, on dit que :

* est **injective** si

.

* est **surjective** si

* est **bijective** si elle à la Foix injective et surjective.

On dit également que est une **injection, surjection, bijection.**

Exemple5

Soit définies par , .

est bijective car :

* , injective.
* vérifiant , f surjective
* est donc bijective car injective et surjective.

n’est ni injective ni surjective car

* non injective.

non surjective.

Application réciproque

Soit , une application, si est bijective on définit de sur une bijection appelée **application réciproque** de telle que

Exemple6

Dans l’exemple5 l’application est bijective son application réciproque est

.

Remarque

).