Année 2020/2021

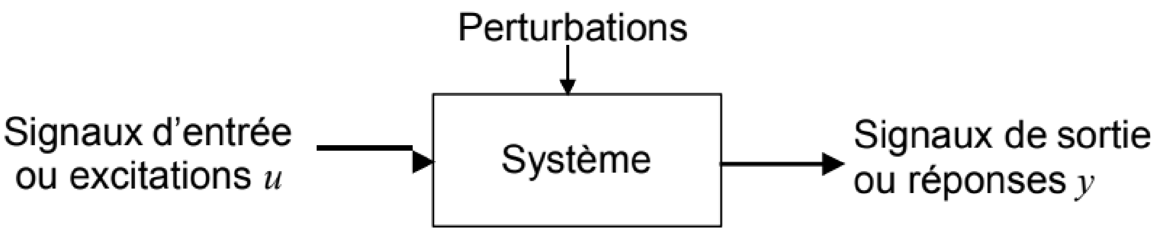
<u>RAPPEL DES NOTIONS UTILES</u>

Représentation des systèmes dynamiques continus à temps invariant (LTI)

Introduction

Système : ensemble d'objets interagissant entre eux pour réaliser une fonction. Il est connecté au monde extérieur à travers :

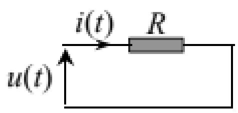
- ses entrées:
    - signaux d'excitation : actions envoyées au système
    - perturbations qui sont en général imprévisibles
- ses sorties : réponses du système aux signaux d'entrée



Classification des systèmes

Système statique

La réponse du système à une excitation est instantanée:

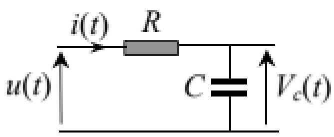


<u>Equation</u>

$$y(t) = i(t) = \frac{1}{R}u(t)$$

Système dynamique

La réponse est fonction de l'excitation et des réponses passées. La réponse est fonction de l'excitation et des réponses passées.



<u>Equation</u>

$$RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

avec $y(t) = V_c(t)$

Systèmes monovariable et multivariable:

Monovariable : système à une entrée et une sortie (SISO)

Multivariable : nombre d'entrées + nombre de sorties > 2 (MIMO)

Systèmes continu et discret

Continu : l'information circule à tout instant de façon continue

$$RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Discret : l'information circule à des instants discrets

$$RCy(k+1) + \left(1 - RC\right)y(k) = u(k)$$

Systèmes linéaires et non linéaires

Le système est linéaire s'il satisfait au principe de superposition.

Si $y_i(t)$ est la réponse du système à l'entrée $u_i(t)$ alors la réponse du système à $u(t) = \sum_i \alpha_i u_i(t)$ est $y(t) = \sum_i \alpha_i y_i(t)$

Le système est non-linéaire dans le cas contraire.

Système causal

La réponse temporelle du système ne peut précéder son entrée

Système invariant ou stationnaire

La réponse du système est invariante par translation dans le temps

Soit $y(t)=f(u(t), y_{t_0})$ la réponse à l'instant t à partir des conditions initiales y_{t_0}. Le système est stationnaire ssi $f\left(u(t), y_{t_0}\right) = f\left(u(t+T), y_{t_0+T}\right)$

On peut décrire les systèmes linéaires à temps invariant (LTI) par des fonctions de transfert en s (cas continu) ou en z (cas discret).

Dans la suite, on étudiera les systèmes monovariables continus LTI

Rappels sur la transformée de Laplace

Définition de la Transformée de Laplace (TL)

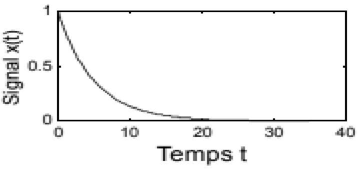
- $x(t)$: signal réel tel que $x(t)=0 \quad \forall t<0$
- Transformée de Laplace de $x(t)$: $X(s)=L(x(t))=\int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$
- $X(s)$: fonction de la variable complexe $s=\sigma+j\omega,\ \sigma\geq 0$

Exemple

Soit le signal $x(t)=e^{-at}$ pour $t\geq 0$ et $a>0$

$X(s)=\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-st}dt=\int_0^{+\infty} e^{-(a+s)t}dt$

$X(s)=\dfrac{1}{s+a}$



Transformée de Laplace inverse

$$x(t)=L^{-1}(X(s))=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{ts}ds$$

priétés de la TL

$x(t)$ et $y(t)$: signaux réels tels que $x(t)=0,\ y(t)=0 \quad \forall t<0$

- Linéarité

  $L(\alpha\, x(t)+\beta\, y(t))=\alpha X(s)+\beta Y(s) \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}^*$

- Dérivation

  $L(\dot{x}(t))=sX(s)-x(0^+) \quad x(0^+)$: condition initiale

  $L(x^{(k)}(t))=s^k X(s)-s^{k-1}x(0^+)-s^{k-2}x^{(1)}(0^+)-\ldots-x^{(k-1)}(0^+)$

  $x(0^+), x^{(1)}(0^+), \ldots, x^{(k-1)}(0^+)$: conditions initiales

  Cas particulier : conditions initiales nulles $L(x^{(k)}(t))=s^k X(s)$

  Intégration

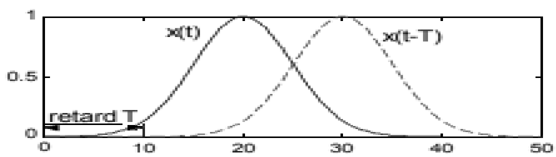
  $y(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau \implies L(y(t))=\dfrac{X(s)}{s}+\dfrac{y(0^+)}{s}$

  Condition initiale nulle : $L(y(t))=\dfrac{X(s)}{s}$

Rappels sur la TL

- Retard temporel

  $L(x(t-T))=e^{-sT}X(s)$



- Théorème de la valeur initiale

  $x(0^+)=\lim_{t\to 0^+} x(t)=\lim_{s\to +\infty} sX(s)$

- Théorème de la valeur finale

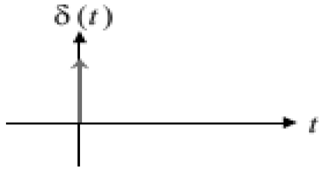
  $x_\infty=\lim_{t\to +\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} sX(s)$

- Produit de convolution

  $z(t)$: convolution des signaux réels $x(t)$ et $y(t)$

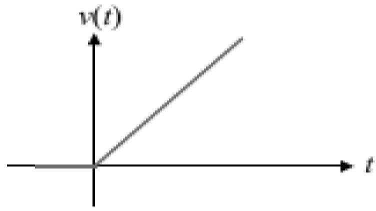
  $z(t)=x(t)*y(t)=\int_0^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \implies Z(s)=X(s).Y(s)$

- Impulsion de Dirac $\delta(t)$



$$L(\delta(t)) = 1$$

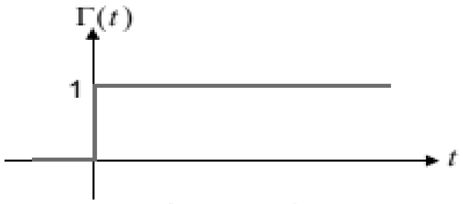
- Rampe ou échelon de vitesse



$$v(t) = t\Gamma(t)$$

$$L(v(t)) = \frac{1}{s^2}$$

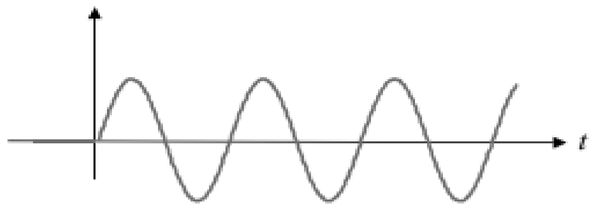
- Echelon unité $\Gamma(t)$



$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$L(\Gamma(t)) = \frac{1}{s}$$

- Signal sinusoïdal



$$x(t) = \sin(\omega t + \varphi)\ t \geq 0$$

$$L(x(t)) = \frac{\sin\varphi + \omega\cos\varphi}{s^2 + \omega^2}$$

Un système linéaire est assimilable à un filtre linéaire F

- Réponse du système à une impulsion de Dirac $\delta(t)$

  $h(t) = F(\delta(t))$ $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système

- Réponse à une entrée quelconque $u(t)$, $u(t) = 0\ \forall t < 0$

  - Rappel : $u(t) = u(t) * \delta(t) = \int_0^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
  - $y(t) = F(u(t)) = F\left(\int_0^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right)$

  Système linéaire $\Rightarrow$ $y(t) = \int_0^{+\infty} u(\tau)F(\delta(t-\tau))d\tau$

  Système invariant $\Rightarrow$ $h(t-\tau) = F(\delta(t-\tau))$

  $$\boxed{y(t) = \int_0^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = u(t) * h(t)}$$

  $y(t) = F(u(t))$ produit de convolution de $u(t)$ et de $h(t)$

Fonction de transfert d'un système LTI

Fonction de transfert

$$y(t) = u(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = L(y(t)) = U(s)H(s) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$H(s)$ est la fonction de transfert du système

$H(s) = L(h(t))$ est la TL de la réponse impulsionnelle

- Système continu régi par une équation différentielle

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t)$$

avec $m \leq n$

On suppose les conditions initiales nulles c'est-à-dire

$$y^{(n-1)}(0) = \cdots = y^{(1)}(0) = y(0) = 0$$

$$u^{(m-1)}(0) = \cdots = u^{(1)}(0) = u(0) = 0$$

- Système régi par une équation différenti uite)

En utilisant la TL, on a :

$$a_n s^n Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \cdots + b_1 s U(s) + b_0 U(s$$

$$(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0) U(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}}$$

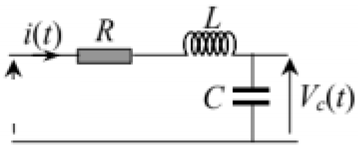
La fonction de transfert a la forme d'une fraction rationnelle :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s)$ et $D(s)$: polynômes en s de degrés respectifs n et m

Le système est dit d'ordre n

- Exemple : circuit RLC



Sortie du système : $y(t) = V_c(t)$

- Lois de l'électricité

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + V_c(t) = u(t)$$

$$V_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad i(t) = C\dot{V}_c(t)$$

On en déduit : $LC\ddot{V}_c(t) + RC\dot{V}_c(t) + V_c(t) = u(t)$

- Fonction de transfert

$$(LC s^2 + RC s + 1)V_c(s) = U(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{V_c(s)}{U(s)} = \frac{1}{LC s^2 + RC s + 1}}$$

Eléments caractéristiques de la FT

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- Pôles (modes) et zéros du système

  - Les pôles sont les racines $\lambda_i \in \mathbb{C}$ du polynôme $D(s)$. Les pôles sont soit réels, soit des paires de pôles complexes conjugués
  - Un système d'ordre n admet n pôles distincts ou non
  - Les zéros sont les racines $z_i \in \mathbb{C}$ du polynôme $N(s)$

- Gain du système

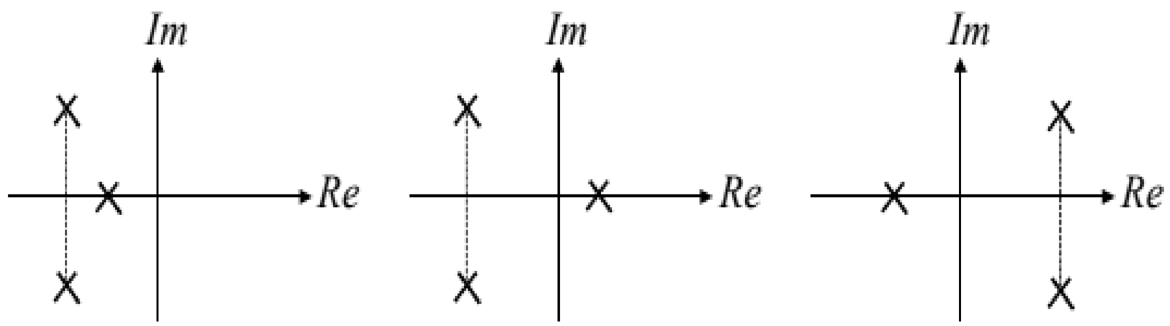
$$H(s) = \frac{K}{s^{\alpha}} \frac{b_m/b_0 \, s^m + \cdots + b_1/b_0 \, s + 1}{a_n/a_{\alpha} \, s^n + \cdots + a_1/a_{\alpha} \, s + 1} \qquad K = \frac{b_0}{a_{\alpha}} \geq 0$$

: gain du système

Stabilité des systèmes LTI

- Théorème

> Un système LTI est stable si et seulement si tous ses pôles λ_i ont une partie réelle $Re(\lambda_i)$ négative



Stable Instable Instable

> Le domaine de stabilité est le demi-plan gauche du plan complexe