COMMANDE POLYNOMIALE

Introduction

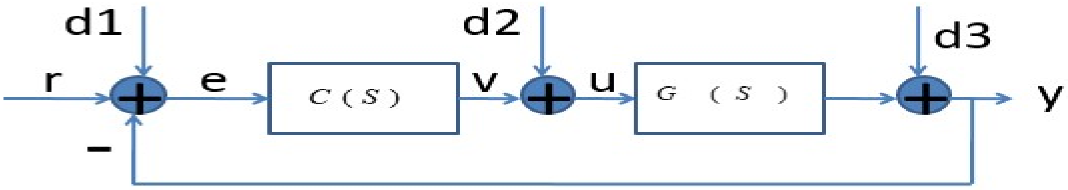
Cette technique de conception se décline en deux approches :

- Le placement pôles-zéros ou suivi d'un modèle,
- *Le placement de pôles.*

Pour implémenter ces deux approches nous utiliserons deux structures de commande, à savoir :

- Structure à retour unitaire
- Structure à deux degrés de liberté (**RST**).

Dans les deux cas, les correcteurs utilisés doivent être propres et le système résultant doit être bien-posé et totalement stable.
Le bruit et les perturbations apparaissent souvent dans les systèmes de commande.



Les perturbations des systèmes sont ,en effet, inévitables dans la pratique.

Ainsi, des perturbations peuvent résulter de sources externes ou de variations internes.

Par conséquent, un bon système de commande devrait pouvoir suivre les consignes de référence et rejeter les effets du bruit et des perturbations.

La conception des systèmes de commande est soumise à certaines contraintes physiques.

La première contrainte est que les correcteurs utilisés dans la conception doivent avoir des ***fonctions de transfert propres est réalisables.***

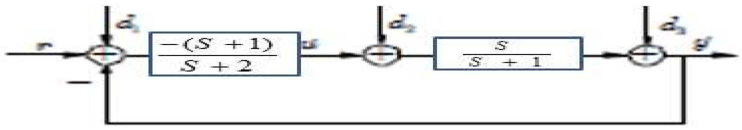
Si la fonction de transfert d'un correcteur est impropre, sa construction nécessite l'utilisation de dérivateurs purs. Les dérivateurs purs construits en utilisant des amplificateurs opérationnels peuvent être instables.

Ainsi, les correcteurs avec des fonctions de transfert impropres ne peuvent être facilement construits en pratique. Pour cette raison, tous les correcteurs utilisés dans la conception devront avoir des fonctions de transfert propres.

Même si toutes les composantes d'un système ont des fonctions de transfert propres, un système de commande ainsi construit peut ne pas avoir une fonction de transfert propre.

EXEMPLE.

Soit le système



Les fonctions de transfert du correcteur et du système sont propres.

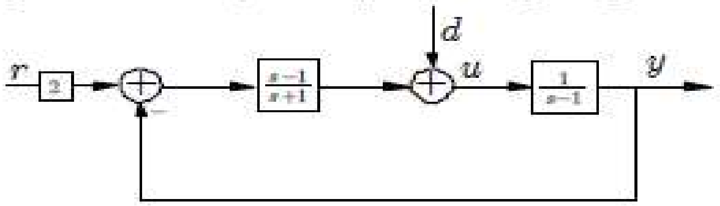
Alors que la fonction de transfert **est impropre.**

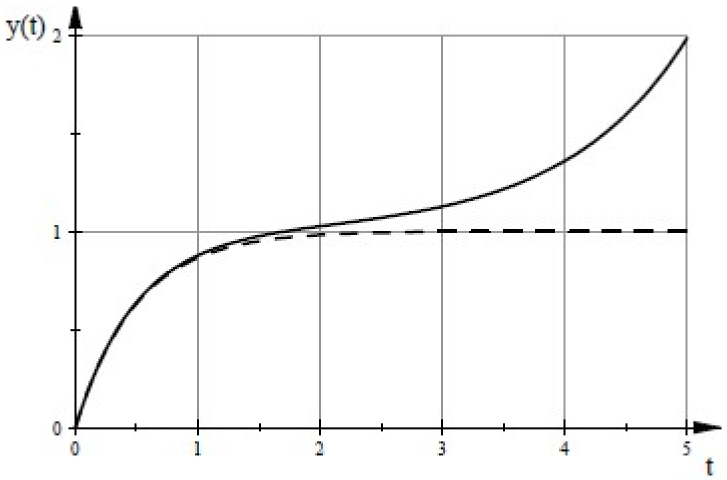
$$\boxed{G_{yr}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{-\frac{s+1}{s+2}\frac{s}{s+1}}{1-\frac{s+1}{s+2}\frac{s}{s+1}} = \frac{-s}{2}}$$

Un système est dit bien-posé ou propre si les fonctions de transfert entre toutes les entrées et sorties possibles sont propres.

Stabilité totale

Dans la conception des systèmes de commande, la première exigence est toujours la stabilité de la fonction de transfert : Gyr (S) entre la référence « r » et la sortie « y ».
Toutefois, cela peut ne pas garantir que le système fonctionne correctement.





–– pour r= 1 et d = 0 et – pour r = 1 et d = 0,01.

La fonction de transfert entre la référence « *r* » et la sortie « *y* » *est*:

$$\boxed{G_{yr}(s) = 2\frac{\frac{s-1}{s+1}\frac{1}{s-1}}{1+\frac{s-1}{s+1}\frac{1}{s-1}} = \frac{2}{(s+2)}}$$

est STABLE

Alors que la fonction de transfert entre la perturbation « *d* » et la sortie« *y* » *est*:

$$\boxed{G_{yd}(s) = \frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{s-1}{s+1}\frac{1}{s-1}} = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}}$$

est INSTABLE

Conclusion de l'analyse

Ainsi, toute perturbation non nulle, aussi petite soit-elle, excitera une réponse infinie du système. Par conséquent, le système ne peut pas être utilisé dans la pratique, même si sa fonction de transfert de « r » à « y » est stable. Cela motive la définition suivante :

Un système est dit totalement stable si la fonction de transfert, en boucle fermée, de chaque paire entrée-sortie possible (sous-système) est stable.

De l'exemple, il apparaît que si un système possède un pôle instable, il est inutile de l'éliminer par compensation directe. Bien que le pôle compensé n'apparaît pas dans la fonction de transfert Gyr(S), il apparaît dans la fonction de transfert de d à y. Ce pôle compensé est appelé *un pôle caché de Gyr(S)*

Toute compensation pôle-zéro instable n'éliminera pas le pôle instable, mais elle le cachera dans certaines fonctions de transfert en boucle fermée.

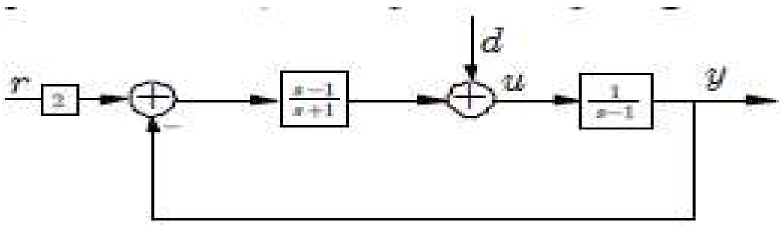
Condition d'un système totalement stable

Considérons un système qui se compose d'un certain nombre de sous-systèmes. Chaque sous-système est supposé être complètement caractérisé par sa fonction de transfert propre.

Soit *Gyr (S)* la fonction de transfert globale. Si le nombre de pôles de *Gyr (S)* est égal au nombre total de pôles de tous les sous-systèmes, le système est complètement caractérisé par *Gyr (S)* . Sinon, le système n'est pas complètement caractérisé par *Gyr (S)* , *Gyr (S)* est considérée comme ayant des pôles manquants.

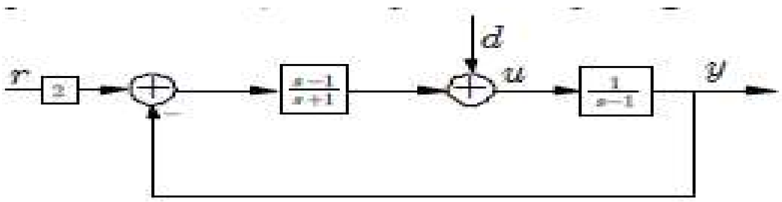
Les pôles manquants proviennent de la compensation pôle-zero et leur nombre est égal à la différence entre le nombre de pôles de Gyr (S) et le nombre total de pôles de tous les sous-systèmes.

Un système est totalement stable si et seulement si les pôles de la fonction de transfert global et de ses pôles manquants sont tous des pôles stables.



$$G_{yr}(s) = 2\frac{\frac{s-1}{s+1}\frac{1}{s-1}}{1+\frac{s-1}{s+1}\frac{1}{s-1}} = \frac{2}{(s+2)}$$

La fonction de transfert ***Gyr (S)*** , possède un seul pôle (-2), ce qui est inférieur au nombre total de pôles de ***C (s)*** soit (-1) et G (S) soit (+1) . Par conséquent, il existe un pôle manquant. Le pôle de *Gyr (S)* est stable, mais le pôle manquant (S − 1) « *NUMERATEUR DU CORRECTEUR* » est instable. Par conséquent*, le système n'est pas totalement stable*.



$$G_{yd}(s) = \frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{s-1}{s+1}\frac{1}{s-1}} = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$$

Le nombre de pôles de ***Gyd (S)*** est égal au nombre total de pôles *de* ***C(S)*** et ***G(S)*** Par conséquent, ***Gyd (S)*** n'a pas de pôle manquant. ***Le système est totalement stable si et seulement si tous les pôles de Gyd (S) sont des pôles stables***. Ce n'est pas le cas. Par conséquent***, le système n'est pas totalement stable.***

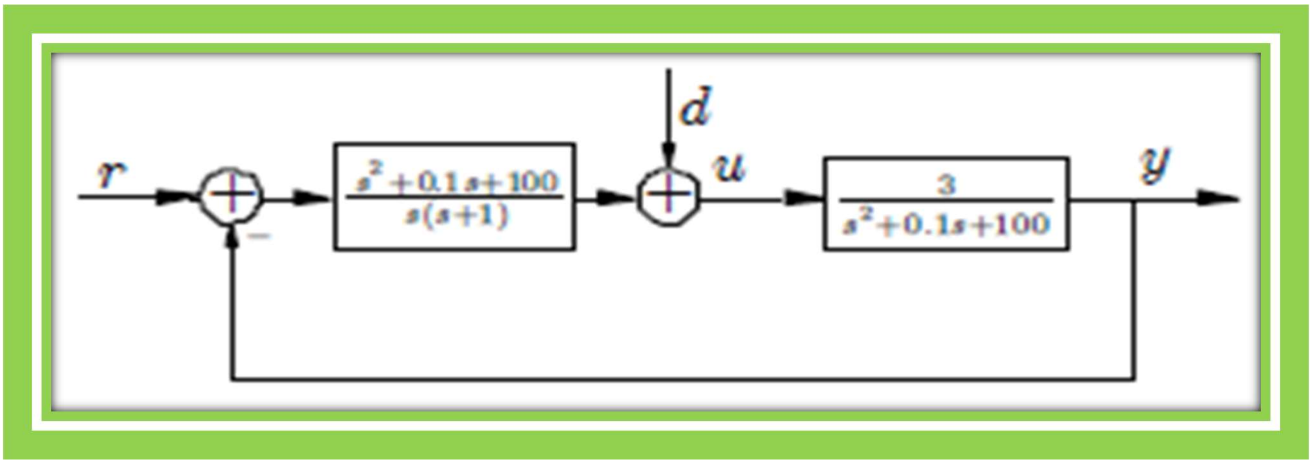
<u>Exemple:</u>

Soit la fonction de transfert du système est:

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + 0.1s + 100}$$

et la fonction de transfert du correcteur est:

$$C(s) = \frac{s^2 + 0.1s + 100}{s(s+2)}$$



Notez que ***C (S) est de type 1***, donc l'erreur de position du système à retour d'unité est nulle.
La fonction de transfert globale de *r* à *y* est:

$$G_{yr}(s) = \frac{3}{s^2 + 2s + 3}$$

Analyse

Le nombre de pôles de ***Gyr (S)*** est 2, soit 2 moins que le nombre total de pôles de ***C(S)*** et ***G(S)*** **.** Ainsi, ***Gyr (S)*** a deux pôles manquants $-0.05 \pm j10$; qui sont les racines.

Puisque les pôles de ***Gyr (S)*** et les deux pôles manquants sont stables, le système est totalement stable.

- **Structure à retour unitaire**

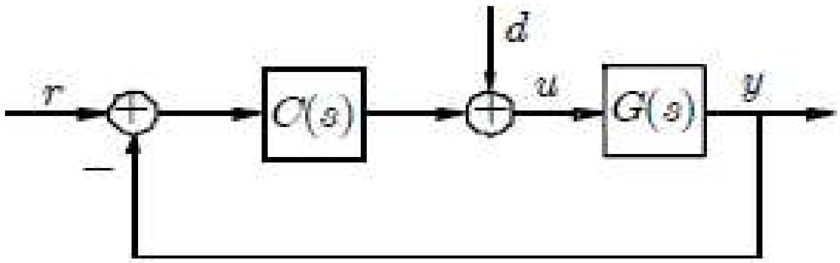
Soit la structure en boucle fermée de la figure ci-dessous avec un retour unitaire, où:

$$G(S) = B(S)/A(S)$$

est la fonction de transfert du système,

$$C(S) = Q(S)/P(S)$$

est la fonction de transfert du correcteur.
Les signaux ***r, d*** et ***y*** sont, respectivement, la consigne, la perturbation additive et la sortie du système.



Placement des pôles et des zéros (Suivi d'un modèle)

Si $G_m(s) = N(s)/D(s)$ représente le comportement désiré du système, alors en boucle fermée, nous devons avoir l'identité :

$$G_m(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

D'où la fonction de transfert du correcteur peut être établie comme :

$$C(s) = \frac{G_m(s)}{G(s)(1 - G_m(s))}$$

Les hypothèses suivantes sont nécessaires pour la réalisation de la boucle de commande.

- $G(s)$ est propre, c'est-à-dire $\deg B(s) \leq \deg A(s) = n$.
- $G(s)$ est coprime, c'est-à-dire que les polynômes $A(s)$ et $B(s)$ sont premiers entre eux et ne possèdent aucun facteur commun.
- $G_m(s)$ est propre, c'est-à-dire $\deg N(s) \leq \deg D(s) = n$.
- $C(s)$ est propre, c'est-à-dire $\deg Q(s) \leq \deg P(s) = m$.

- Exemple

Soit le système défini par la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Le comportement désiré en boucle fermée est donnée par :

$$G_m(s) = \frac{3}{s^2 + 2.4s + 3}$$

L'utilisation de la relation précédente permet d'obtenir le correcteur suivant :

$$C(s) = \frac{G_m(s)}{G(s)(1 - G_m(s))}$$

$$C(s) = \frac{\frac{3}{s^2+2.4s+3}}{\frac{1}{s(s+2)}\left(1 - \frac{3}{s^2+2.4s+3}\right)} = \frac{3(s+2)}{s+2.4}$$

Placement de pôles

La structure à retour unitaire peut être utilisée pour assurer un placement de pôles arbitraires. Dans ce cas, on spécifie les pôles désirés en boucle fermée et on laisse les zéros libres.

Soit le système d'ordre 2 :

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s(s+2)}}$$

et le correcteur d'ordre zéro (proportionnel): $\boxed{C(S) = K}$

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$\boxed{G_{yr}(s) = \frac{\frac{K}{s(s+2)}}{1 + \frac{K}{s(s+2)}} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}}$$

Si on choisit comme pôle désirés −2 et −3, on doit avoir l'identité suivante :

$$s^2 + 2s + K = (s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6$$

Remarque: Il est clair qu'il n'existe aucune valeur de *K* qui permet de placer les pôles en boucle fermée aux positions indiquées.
Choisissant, maintenant, un correcteur d'ordre 1, défini par :

$$\boxed{C(s) = \frac{q_0 s + q_1}{p_0 s + p_1}}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$\boxed{G_{yr}(s) = \frac{\frac{q_0 s + q_1}{p_0 s + p_1}\frac{1}{s(s+2)}}{1 + \frac{q_0 s + q_1}{p_0 s + p_1}\frac{1}{s(s+2)}} = \frac{q_0 s + q_1}{p_0 s^3 + (2p_0 + p_1)s^2 + (2p_1 + q_0)s + q_1}}$$

Si les pôles désirés sont définis par :

$$D(s) = s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3$$

Alors nous aurons les équations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 \\ 2p_0 + p_1 &= \alpha_1 \\ 2p_1 + q_0 &= \alpha_2 \\ q_1 &= \alpha_3 \end{aligned}$$

Dont la solution permet de calculer les coefficients du correcteur :

$$p_0 = 1$$
$$p_1 = \alpha_1 - 2$$
$$q_0 = \alpha_2 - 2p_1 = \alpha_2 - 2\alpha_1 + 4$$
$$q_1 = \alpha_3$$

Si par exemple, on choisi :

$$D(s) = (s+2)(s+2-j2)(2+2+j2) = s^3 + 6s^2 + 16s + 16$$

Pour ce correcteur, la fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$\boxed{G_{yr}(s) = \frac{\frac{8(s+2)}{s+4}\frac{1}{s(s+2)}}{1+\frac{8(s+2)}{s+4}\frac{1}{s(s+2)}} = \frac{8(s+2)}{(s+2)(s^2+4s+8)}}$$

En effet la fonction de transfert en boucle fermée possède des pôles −2 et −2±2j.
Notez que le correcteur introduit également un zéro (8S+16).
Le zéro est apparu en résolvant les équations précédentes, et nous n'avons aucun contrôle sur lui. Ainsi, le placement des pôles est différent du placement des pôles et des zéros ou le suivi d'un modèle.
Pour généraliser ce résultat, considérons le système donné par la **fonction de transfert**

G(S)=B (S) / A (S)

Avec,

$$B(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \ldots + b_{n-1}s + b_n$$
$$A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1}s + a_n,\ a_n \neq 0$$

Le correcteur est définit par:

C (S)=Q(S)/P (S), avec,

$$Q(s) = q_0 s^m + q_1 s^{m-1} + q_2 s^{m-2} + \ldots + q_{m-1}s + q_m$$
$$P(s) = p_0 s^m + p_1 s^{m-1} + p_2 s^{m-2} + \ldots + p_{m-1}s + p_m$$

On supposera que G(S) et C (S) sont propres. La fonction de transfert en boucle fermée est définit par :

$$\boxed{\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{Q(s)B(s)}{P(s)A(s) + Q(s)B(s)}}$$

D'où nous avons l'équation polynomiale (**<u>appelée équation de Bezout ou de Diaphantine</u>**) suivante :

$$\boxed{P(s)A(s) + Q(s)B(s) = D(s)}$$

Remarque: Dans cette équation, ***A(S) et B(S) sont donnés***, et *D(S) doit être choisi* par le concepteur.

Tout d'abord, nous montrerons que si B(S) et A(S) ont des facteurs communs, alors D(S) ne peut être arbitrairement choisi ou, de manière équivalente, le placement arbitraire des pôles n'est pas possible.

Exemple

Si B(S) et A(S) contiennent tous deux le facteur (S−1), on peut écrire :

B(S)=(S−1)B0 (S) et A (S)=(S−1)A0 (S), alors *l'équation de Diaphantine* devient :

$$\boxed{(P(s)A_0(s) + Q(s)B_0(s))(s - 1) = D(s)}$$

Cela implique que D(S) doit contenir le même facteur commun (S−1).

$$\boxed{(P(s)A_0(s) + Q(s)B_0(s))(s - 1) = D(s)}$$

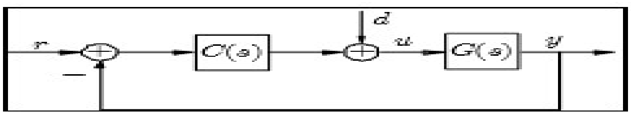
Ainsi, si A(S) et B (S) ont des facteurs communs, alors des racines de D(S) ne peuvent être arbitrairement attribuées.

Par conséquent, *nous supposerons dès maintenant que A(S) et B (S) n'ont pas de facteurs communs*

Sous cette hypothèse, comme A(S) et B (S) sont propres, nous avons :

$$deg\ B(S) \leq deg\ A(S) = n \quad et \quad deg\ Q(S) \leq deg\ P(S) = m.$$

Ainsi, **D(S) a un degré *n+m*,** ou de manière équivalente, le système en boucle fermée de la figure possède ***(n + m) pôles.***



Si le polynôme désiré D(s) est défini comme :

$$D(s) = s^{n+m} + \alpha_1 s^{n+m-1} + \alpha_2 s^{n+m-2} + \ldots + \alpha_{n+m-1} s + \alpha_{n+m}$$

L’équation polynomiale peut être mise sous la forme matricielle :

$$\boxed{\left(P(s)A_0(s) + Q(s)B_0(s)\right)(s-1) = D(s)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & b_{n-1} & \vdots & & b_0 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \\ 0 & a_n & \cdots & \vdots & 0 & b_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & a_{n-1} & \vdots & 0 & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \vdots & 0 & a_n & 0 & 0 & 0 & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \\ \alpha_{n+2} \\ \vdots \\ \alpha_{n+m} \end{bmatrix}$$

La solution de cette forme matricielle est ainsi convertie en la solution d’un ensemble de nm +1 équations algébriques, où les inconnus recherchés sont les coefficients du correcteur

<u>Exemple:</u> Soit le système

$$\boxed{G(s) = \frac{(s-2)}{(s+1)(s-1)} = \frac{s-2}{s^2-1}}$$

Sachant que sous forme générale , on peut écrire

$$G(S) = \frac{B(S)}{A(S)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

$\boxed{\text{D'où on peut voir que : } a_1 = 0, a_2 = -1, b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = -2.}$

Soit , alors :

$$G(s) = \frac{b_0\, s^2 + b_1\, s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

Le correcteur proposé est donné par :

$$\boxed{C(s) = \frac{q_0 s + q_1}{p_0 s + p_1}}$$

Les pôles désirés en boucle fermée sont choisis comme :

$$D(s) = (s+3)(s+2-j1)(s+2+j1) = s^3 + 7s^2 + 17s + 15$$

Par identification avec la forme générale :

$$D(s) = s^{n+m} + \alpha_1 s^{n+m-1} + \alpha_2 s^{n+m-2} + \ldots + \alpha_{n+m-1} s + \alpha_{n+m}$$

On a :

$$\alpha_1 = 7, \alpha_2 = 17, \alpha_3 = 15.$$

$$\boxed{C(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{q_0 s + q_1}{p_0 s + p_1}}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}}$$

Le développement de l'équation de Bezout (*Diaphantine)* permet d'avoir

$$\boxed{P(s)A(s) + Q(s)B(s) = D(s)}$$

$$\boxed{(p_0 s + p_1)(s^2 + a_1 s + a_2) + (q_0 s + q_1)(b_0 s^2 + b_1 s + b_2) = s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3}$$

L'égalisation des coefficients de même puissance produit les équations algébriques suivantes :

$$\begin{aligned} p_0 + q_0 b_0 &= 1 \\ p_0 a_1 + p_1 + q_0 b_1 + q_1 b_0 &= \alpha_1 \\ p_0 a_2 + p_1 a_1 + q_0 b_2 + q_1 b_1 &= \alpha_2 \\ p_1 a_2 + q_1 b_2 &= \alpha_3 \end{aligned}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Numériquement, nous avons

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 17 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Comme l'ordre du correcteur m = n−1=1, la solution est unique, soit :

$$\boxed{\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{79}{3} \\ -\frac{58}{3} \\ -\frac{62}{3} \end{bmatrix}}$$

Et, le correcteur est alors

$$\boxed{C(s) = \frac{q_0 s + q_1}{p_0 s + p_1}}$$

$$\boxed{C(s) = \frac{-\frac{58}{3}s - \frac{62}{3}}{s + \frac{79}{3}} = -\frac{(58s + 62)}{3s + 79}}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$G_{yr}(s) = \frac{Q(s)B(s)}{D(s)} = -\frac{1}{3}\frac{(58s+62)(s-2)}{s^3 + 7s^2 + 17s + 15} = -\frac{1}{3}\frac{(s-2)(58s+62)}{s^3 + 7s^2 + 17s + 15}$$

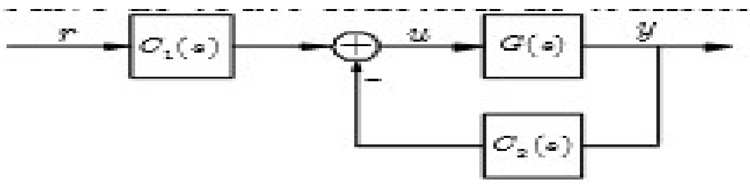
Notez que le zéro (58S + 62) est introduit par le correcteur et que le concepteur n'a aucun contrôle sur lui.

Structure à deux degrés de liberté (RST)

Bien que la structure à retour unitaire puisse être utilisée pour obtenir un placement de pôle arbitraire, elle ne peut généralement être utilisée pour obtenir un suivi de modèle.

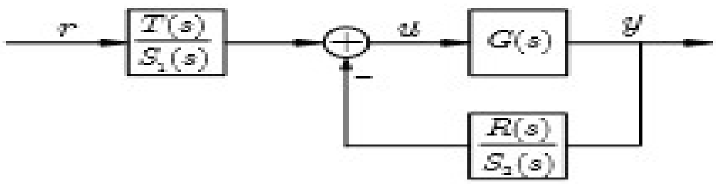
Dans cette section, nous introduirons une structure, appelée structure à deux degrés de liberté ou RST, qui peut être utilisée pour assurer le suivi de toute fonction de transfert désirée réalisable.

Le signal de commande dans la structure à retour unitaire de la figure est donné par :



$$\boxed{u = C(s)\,r - C(s)\,y}$$

Ce qui montre un manque de flexibilité, puisque les deux signaux *r* et *y* sont traités par la même fonction de transfert. La possibilité d' améliorer cette structure est d'utiliser deux correcteurs (comme le montre la figure suivante), tel que:



Supposons que les deux correcteurs sont de la forme

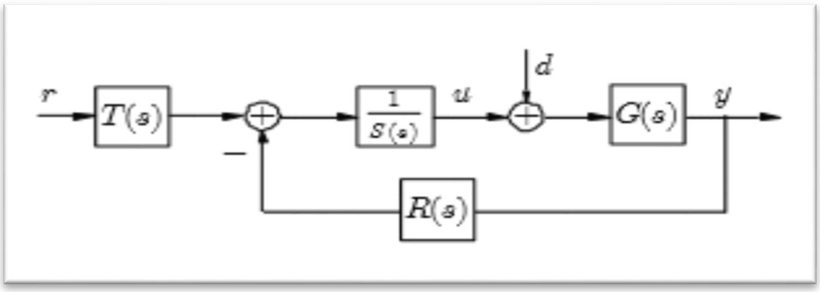
$$C_1(s) = \frac{T(s)}{S_1(s)}$$

$$C_2(s) = \frac{R(s)}{S_2(s)}$$

$$\boxed{u = C_1(s)\,r - C_2(s)\,y}$$

On peut garder la même flexibilité tout en simplifiant la procédure de conception si on choisi le même polynôme **S1 (S)=S2 (S)=S (S).**

D'où nous obtenons la structure :



$$u = \frac{T(s)}{S(s)}r - \frac{R(s)}{S(s)}y$$

L'utilisation de l'équation précédemment discutée dans la fonction de transfert,

$$y = \frac{B(s)}{A(s)}u$$

Permet d'obtenir la fonction de transfert en boucle fermée :

$$\boxed{G_{yr}(s) = \frac{B(s)T(s)}{A(s)S(s)+B(s)R(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = G_m(s)}$$

Cette structure de commande peut être utilisée pour réaliser n'importe quel suivi de modèle réalisable. Pour plus de commodité, nous discutons uniquement le cas où G(S) est strictement propre

Le problème RST se pose comme suit : Etant donnés la fonction de transfert du système $G(s) = B(s)/A(s)$, où $B(s)$ et $A(s)$ sont coprimes et $\deg B(s) < \deg A(s) = n$, une fonction de transfert réalisable $G_m(s) = N(s)/D(s)$, déterminer la structure de commande RST $(R(s), S(s)$ et $T(s))$ qui permet le suivi de ce modèle (placement des pôles - zéros), tels que :

$$\boxed{\frac{B(s)T(s)}{A(s)S(s)+B(s)R(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = G_m(s)}$$

La procédure de conception du correcteur RST suit les étapes suivantes :

Calculer $$\frac{G_m(s)}{B(s)} = \frac{N(s)}{D(s)B(s)} = \frac{N_0(s)}{D_0(s)}$$

où $N_0(s)$ et $D_0(s)$ sont coprimes. Puisque $N(s)$ et $D(s)$ sont coprimes par hypothèse, des facteurs communs peuvent exister uniquement entre $N(s)$ et $B(s)$. Les polynômes résultants de l'élimination des facteurs communs entre $N(s)$ et $B(s)$ sont notés $N_0(s)$ et $D_0(s)$. Notez que si $N(s) = B(s)$, alors $D_0(s) = D(s)$ et $N_0(s) = 1$.

$$\boxed{G_m(s) = \frac{N_0(s)B(s)}{D_0(s)} = \frac{B(s)T(s)}{A(s)S(s)+B(s)R(s)}}$$

A partir de cette équation, on pourrait être tenter de définir $T(s) = N_0(s)$ et de résoudre pour $S(s)$ et $R(s)$ en utilisant

$$\boxed{D_0(s) = A(s)S(s) + B(s)R(s)}$$

Malheureusement, les correcteurs qui en résultent ne sont pas propres en général. Par conséquent, un peu plus de manipulation est nécessaire.

Introduire un polynôme de Hurwitz $D_c(s)$ arbitraire de sorte que le deg $D_c(s)D_0(s) \geq 2n-1$. En d'autres termes, si deg $D_0(s) = p$, alors le degré de $D_c(s)$ doit être d'au moins $2n-1-p$. Puisque le polynôme $D_c(s)$ sera éliminé dans la conception, ses racines devraient être choisies dans une région acceptable.

$$\boxed{G_m(s) = \frac{N_0(s)B(s)}{D_0(s)} = \frac{N_0(s)(B(s)D_c(s))}{D_0(s)D_c(s)} = \frac{B(s)T(s)}{A(s)S(s)+B(s)R(s)}}$$

Maintenant on fixe le polynôme T (S) comme :

$$T(s) = N_0(s)D_c(s)$$

Et, on va déterminer les polynômes S (S) et R(S) à partir de la solution de l'équation polynomiale :

$$A(s)S(s) + B(s)R(s) = D_0(s)D_c(s)$$

En notant les polynômes $R(s)$ et $S(s)$ comme :

$$R(s) = \beta_0 s^m + \beta_1 s^{m-1} + \beta_2 s^{m-2} + \ldots + \beta_{m-1}s + \beta_m$$
$$S(s) = \gamma_0 s^m + \gamma_1 s^{m-1} + \gamma_2 s^{m-2} + \ldots + \gamma_{m-1}s + \gamma_m$$

et

$$D_0(s)D_c(s) = s^{n+m} + \alpha_1 s^{n+m-1} + \alpha_2 s^{n+m-2} + \ldots + \alpha_{n+m-1}s + \alpha_{n+m}$$

Le développement de l'équation polynomiale permet d'obtenir le système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & b_{-1} & \vdots & & b_0 \\ a_n & a_{-1} & \cdots & a_1 & b_n & b_{-1} & \cdots & b_1 \\ 0 & a_n & \cdots & \vdots & 0 & b_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & a_{-1} & \vdots & 0 & \ddots & b_{-1} \\ 0 & \vdots & 0 & a_n & 0 & 0 & 0 & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \\ \alpha_{n+2} \\ \vdots \\ \alpha_{n+m} \end{bmatrix}$$

Exemple : Soit le système donné par :

$$\boxed{G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s+3}{s(s-1)} = \frac{s+3}{s^2-s}}$$

D'où : $a_1 = -1, a_2 = 0, b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 3.$

Le modèle à suivre est défini par :

$$G_m(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{600.25}{s^2 + 34.3s + 600.25}$$

On calcule le rapport :

$$\frac{G_m(s)}{B(s)} = \frac{600.25}{(s^2 + 34.3s + 600.25)(s+3)} = \frac{N_0(s)}{D_0(s)}$$

Comme le deg $D_0(s) = 3$, alors le deg $D_c(s) = 0$ (constante). Un choix très simple est donné par $D_c(s) = 1$.

Ainsi nous aurons $T(s) = 600.25$.

Le développement $D_0(s)\, D_c(s) = s^3 + 37.3s^2 + 703.15s + 1800.75$

fournit $\alpha_1 = 37.3, \alpha_2 = 703.15, \alpha_3 = 1800.8$

Avec la notation suivante

$$S(s) = \gamma_0 s + \gamma_1$$
$$R(s) = \beta_0 s + \beta_1$$

L'équation polynomiale

$$A(s)\,S(s) + B(s)\,R(s) = D_0(s)\,D_c(s)$$

Peut être convertie en équations algébriques :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Soit, avec les valeurs numériques données :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 37.3 \\ 703.15 \\ 1800.8 \end{bmatrix}$$

La solution unique est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3.0042 \\ 35.296 \\ 600.27 \end{bmatrix}$$

D'où le correcteur est défini par les polynômes calculés :

$$T(s) = 600.25$$
$$R(s) = 35.3s + 600.25$$
$$S(s) = s + 3$$

Soit le système :

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s+3}{s(s-1)} = \frac{s+3}{s^2 - s}$$

Avec : $a_1 = -1, a_2 = 0, b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 3.$

Le modèle à suivre est défini par :

$$G_m(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{10(s+3)}{s^2 + 12.7s + 30}$$

On calcule le rapport

$$\frac{G_m(s)}{B(s)} = \frac{10}{s^2 + 12.7s + 30} = \frac{N_0(s)}{D_0(s)}$$

Comme le deg $D_0(s) = 2$, alors le deg $D_c(s) = 1$, un choix possible est donné par $D_c(s) = (s+3)$. Ce qui conduit au résultat suivant :

$$T(s) = N_0(s) D_c(s) = 10(s+3)$$

Le développement suivant

$$D_0(s) D_c(s) = (s^2 + 12.7s + 30)(s+3)$$
$$= s^3 + 15.7s^2 + 68.1s + 90$$

fournit : $\alpha_1 = 15.7, \alpha_2 = 68.1, \alpha_3 = 90$.

Avec la notation suivante

$$R(s) = \beta_0 s + \beta_1$$
$$S(s) = \gamma_0 s + \gamma_1$$

On abouti aux équations algébriques :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & 1 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Qui sont numériquement équivalentes à :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 15.7 \\ 68.1 \\ 90 \end{bmatrix}$$

Ainsi , les paramètres recherchés sont :

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 13.7 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Le correcteur RST est défini par :

$$T(s) = 10(s+3)$$
$$S(s) = s + 3$$
$$R(s) = 13.7s + 30$$