REPRESENTATION D'ETAT

Introduction

La représentation d'un système par la fonction de transfert peut ne pas être appropriée pour d´écrire les comportements considérés du système. Pour cette raison, d'autres modèles sont utilisés et apparaissent comme une alternative à la fonction de transfert parmi lesquels on cite la ***représentation d'état ou équation d''état ou encore modèle d''état***. Il s'agit, au fait, d'un modèle qui prend en compte la dynamique interne du système et ne se limite pas à la description d'un comportement de type entrée/sortie.
Ce support de cours présente les principes de base des systèmes linéaires mono variables continus.

Principe général

Afin de considérer la dynamique interne d'un système et pas seulement une relation entre son entrée et sa sortie, il convient de prendre en considération les grandeurs qui ne sont ni l'entrée, ni la sortie aussi bien que l'ensemble des phénomènes dynamiques et statiques qui confère au système son comportement.

Une telle préoccupation conduit aux d´définitions suivantes :

Etat : l'état d'un système dynamique est le plus petit ensemble de variables, de grandeurs, tel que la connaissance de cet ensemble à l'instant $t = t_0$, ainsi que celle du signal d'entrée pour $t \geq t_0$, suffit à d´exterminer complétement le comportement du système pour $t \geq t_0$.

L'´évolution de l'´état à partir de l'instant t_0 n'est donc pas déterminée par son évolution avant l'instant t_0. Seuls importent l'état à t_0 et l'entrée à partir de t_0, comme l'illustre la Fig 1 où plusieurs trajectoires de $x(t)$ avant l'instant t_0 aboutissant en $x(t_0)$ sont compatibles avec la même trajectoire de $x(t)$ après t_0.

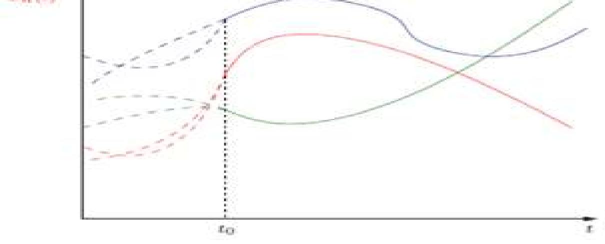

Fig 1 Evolution des composantes de $x(t)$ après t_0 (trait plein) est indépendante de leur évolution avant t_0 (pointillés).

Variables d''état : ce sont les variables, grandeurs qui constituent l''état du système. Elles ne sont pas nécessairement des grandeurs physiques.

Ces variables sont au nombre de **n** et notées $x_1, x_2, ..., x_n$; Où **n** est l'ordre du modèle. L'ensemble $\{x_1, ..., x_n\}$ constitue l''état.

Vecteur d''état : on représente l'état par une concaténation de l'ensemble des variables d'état en un vecteur, *a priori* réel, de dimension n, que l'on note :

$$x = [x_1, \ldots, x_n]'.$$

Il va de soi que les expressions **<u>état et vecteur d''état</u>** sont fréquemment utilisées l'une pour l'autre sans que cela n'altère fondamentalement le propos.

Espace d'état : Il s'agit tout simplement de l'espace vectoriel dans lequel le vecteur d'état x est susceptible d' évoluer, chaque instance de x étant associé à un point de cet espace. Cet espace est donc R^n.

Pour un système dynamique<u>, le vecteur d'état n'est pas unique</u> car plusieurs choix sont possibles. Mais pour que x soit effectivement vecteur d'état, il importe que chacune des variables d'état apparaissent, de manière explicite ou implicite, sous forme dérivée dans les équations d´écrivant le système. Dans le cas contraire, il sera difficile de se servir de cette variable pour prévoir l'évolution du système. Cette constatation conduit à un système d'équations différentielles auquel s'ajoute une équation algébrique :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = f(x(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} f_1(x(t), u(t), t) \\ \vdots \\ f_n(x(t), u(t), t) \end{bmatrix} \\ \\ y(t) = g(x(t), u(t), t). \end{array}\right.}$$

Où, *f* et *g* sont des fonctions susceptibles de prendre presque n'importe quelles formes.

Le système différentiel apparaissant dans la représentation mathématique précédente est appelé ***équation dynamique*** ou ***équation d'évolution*** alors que l'´équation algébrique *y(t)* est dite ***équation de mesure*** ou ***équation de sortie***.

Par ailleurs, les signaux *u(t), y(t)* et $x_i(t)$ sont de toute évidence des signaux temporels. De plus, il est assez fréquent, comme il a déjà été mentionné, que les fonctions non-linéaires f et g ne dépendent pas explicitement du temps. L'on peut alors très souvent omettre la dépendance en *t* de manière à obtenir la représentation d'état suivante, qui correspond à un système différentiel linéaire à coefficients constants :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du. \end{array}\right.}$$

Les relations données dans cette dernière représentation constituent une représentation d'état ***linéaire invariante dans le temps*** (acronyme anglais pour Linear Time-Ivariant, LTI) d'un système. C'est ce type de modèle qui fait l'objet de ce cours.

- **A** est appelée *matrice d'état* ou *d'évolution*. On la nomme aussi parfois *matrice dynamique* ;
- **B** est appelée *vecteur d'entrée* ou de *vecteur commande* (d' où une ambigüité avec le vecteur u) ;
- **C** est le *vecteur de sortie, d'observation* ou de *mesure* (d' où une ambigüité avec le vecteur y) ;
- **D** c'est un scalaire dit de *transmission directe*, qui est nul s'il n'existe aucun lien statique direct entre le signal d'entrée et celui de sortie.

Remarque *Dans le cas où f et g dépendent explicitement de* t*, alors* A*,* B*,* C *et* D *sont des fonctions de* t *et le modèle est dit* ***linéaire variant dans le temps****. Il est souhaitable, si possible de recourir aussi `à une approximation pour considérer ces matrices comme constantes. L'on retrouve alors un modèle LTI.*

La représentation d'état peut être associée au schéma-bloc donné par la figure suivante :

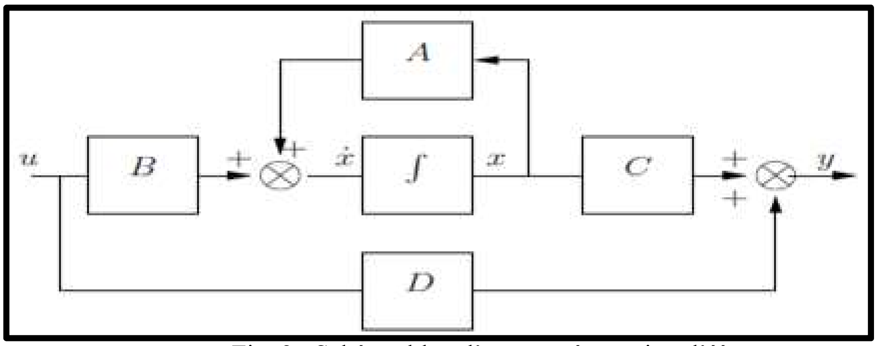

Fig 2 . Schéma-bloc d'une représentation d'´état

Exemple : Soit un circuit RLC .

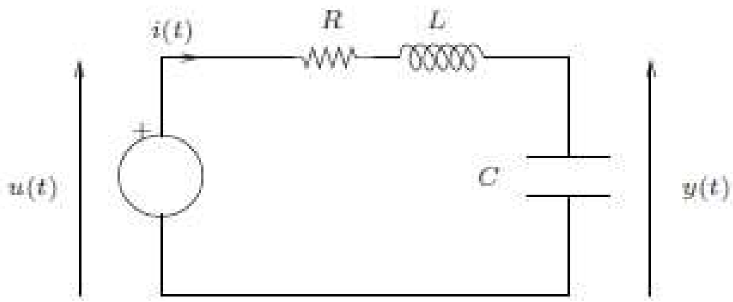

Fig 3. Circuit RLC

Les ´équations issues des lois de l’´électricité qui régissent le comportement du circuit RLC sont les suivantes :

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + y(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)d\tau \Leftrightarrow \dfrac{dy(t)}{dt} = \dfrac{1}{C}i(t). \end{cases}$$

Les deux grandeurs dont la dérivée intervient sont i et y (à partir de maintenant, la dépendance en le temps est omise pour alléger les notations). Soient donc les deux variables d’état $x_1 = i$ et $x_2 = y$. Les équations peuvent donc se récrire comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R}{L}x_1 - \dfrac{1}{L}x_2 + \dfrac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}x_1. \end{cases}$$

Ce qui conduit à noter :

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = 0.$$

Equation différentielle unique
La technique consiste à considérer l'équation différentielle globale et suppose que $m = 0$, $a_n = 1$ et on pose, sans se soucier de la signification du vecteur d'état, les variables d'´état suivantes :

$$x_1 = y \quad ; \quad x_2 = \dot{y} \quad ; \quad x_3 = \ddot{y} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}.$$

On peut alors montrer que :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = 0.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\ddot{y} + \frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{LC}u.$$

On obtient alors :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = 0.$$

Remarque

C'est un quadruplet de matrices différent de celui trouvé précédemment. Ceci permet de constater que le modèle d'état obtenu dépend du choix des variables d'état. Il n'est donc pas unique, contrairement à la fonction de transfert.