Micro-interrogation n°01 en Logique mathématique
Section B
Durée : 1H10

Exercice 1 (2 pts) :

Écrivez une machine de Turing qui reconnait les mots qui ont la forme $(10)^n$ sachant que n est un entier et n $\geq$ 1. Le symbole blanc est le # , le ruban contient plusieurs mots séparés par un # et deux # successifs représentent la fin du ruban.
Exemple : si la machine trouve au début sur le ruban # 010110 # 1 # 1010 ##
Elle renvoie # 010110 **F** 1 **F** 1010 **T**#

Exercice 2 (3,5 pts) :

Considérons le système formel suivant :

- $\Sigma = \{a, b, c\}$ est l'ensemble des symboles appelé l'ensemble d'alphabet.
- W est l'ensemble des formules bien formées, il contient les symboles a, b, c ainsi que toutes les expressions de la forme aa...abcc...c notées a$^n bc^m$, avec (n,m)$\in N^2$. Ex : a^0bc^4 représente en réalité le mot : *bcccc* et a^2bc^2 représente le mot : aabcc.
- A c'est l'ensemble des axiomes qui ont la forme suivante : $\{a^{2i}bc^{2i}|i \in N\}$.
- Il y a une seule règle d'inférence r_1 : $(a^nbc^m, a^kbc^p) \longrightarrow a^{n+k}bc^m$.

Questions :

- Q1 : Les mots suivants : a^2bc^4, a^8b, a^6bc^4 sont-ils des théorèmes ? Justifiez votre réponse.
- Q2 : Quelle est parmi les formes suivantes la forme générale qui représente le langage généré par ce système formel ?
  - a- $\{a^{4k}bc^{2i}|(i,k) \in N^2\}$.
  - b-$\{a^{2k}bc^{2i}|(i,k) \in N^2\}$.
  - c- $\{a^{2k}bc^{2i}|(i,k) \in N^2 et k \geq i\}$.
  - d- $\{a^{2k}bc^{2i}|(i,k) \in N^2 et k = i\}$.
  - e- $\{a^{k}bc^{2i}|(i,k) \in N^2 et k = i\}$.

Exercice 3 (4,5 pts) :

1. Donnez la table de vérité de la formule suivante : F = $((q \longrightarrow (p \wedge r)) \longrightarrow (p \longrightarrow r))$ puis dites si elle est valide, vérifiable ou invérifiable.
2. Soit la formule F' la formule qui représente la négation de la formule F, écrivez la formule F' sous formes FND et FNC.
3. Donnez l'arbre syntaxique de la formule F'.

Solution micro 1 (Section B)

Exercice 1: (2 pts)

La machine de Turing: (1 pt)

$q_0 1 D q_1$	$q_2 0 D q_4$	$q_3 1 D q_1$
$q_1 0 D q_2$	$q_4 (0,1) D q_4$	$q_0 0 D q_4$
$q_2 * T q_2$	$q_4 * F q_4$	$q_3 0 D q_4$
$q_2 T D q_3$	$q_4 F D q_3$	$q_1 1 D q_4$
$q_3 *$ Arrêt	$q_2 1 D q_1$	$q_1 * F q_4$

(1 pt)

Exercice 2: (3,5 pts)

Q1: * Le mot $a^2 b c^4$ n'est pas un théorème, car on a toujours (0,5 pt) (0,5 pts)

$n+K \geq m$.

* Le mot $a^8 b$ c'est un théorème, car si on remplace (0,5 pt) (0,5 pt)

i par 0 dans la forme des axiomes $\{a^{2i} b c^{2i} \mid i \in \mathbb{N}\}$,

on aura l'axiome a_1: b.

Et si on remplace le i par 4, on aura:

L'axiome a_2: $a^8 b c^8$

En appliquant la règle r_1: $(b, a^8 b c^8) \xrightarrow{r_1} a^8 b$

* Le mot $a^6 b c^4$ c'est un théorème, car si on remplace (1 pt)

i par 2 dans la forme des axiomes. on aura:

a_1: $a^4 b c^4$

Et si on remplace i par 1, on aura a_2: $a^2 b c^2$

En appliquant la règle r_1: $(a^4 b c^4, a^2 b c^2) \xrightarrow{r_1} a^6 b c^4$

Q2: La forme générale de ce système formel est la forme

-c- (0,5 pt)

Exercice 3: (4,5 pts)

1) La table de vérité de la formule F est comme suit :

q	p	r	$p \wedge r$	$q \to (p \wedge r)$	$(p \to r)$	F
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	P	V	V	V

(1 pt)

* La formule F est vérifiable (0,5 pt)

2) La formule $F' = \neg((q \to (p \wedge r)) \to (p \to r))$

* La forme FND de la formule F' est.

$\neg((q \to (p \wedge r)) \to (p \to r))$

$\equiv \neg(\neg(q \to (p \wedge r)) \vee (p \to r))$

$\equiv \neg(\neg(q \to (p \wedge r)) \vee (\neg p \vee r))$

$\equiv (q \to (p \wedge r)) \wedge (p \wedge \neg r)$

$\equiv (\neg q \vee (p \wedge r)) \wedge (p \wedge \neg r)$

$\equiv (\neg q \wedge p \wedge \neg r) \vee (p \wedge r \wedge p \wedge \neg r)$

$\equiv (\neg q \wedge p \wedge \neg r) \vee (p \wedge r \wedge \neg r)$ $\longrightarrow$ FND. (1 pt)

* La forme FNC

on a déjà

$(\neg q \wedge p \wedge \neg r) \vee (p \wedge r \wedge \neg r)$

$\equiv (\neg q \vee (p \wedge r \wedge \neg r)) \wedge (p \vee (p \wedge r \wedge \neg r)) \wedge (\neg r \vee (p \wedge r \wedge \neg r))$

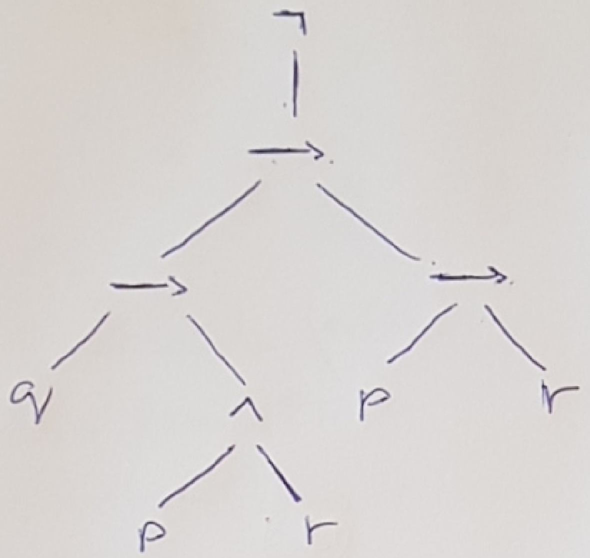
$\equiv ((\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \wedge ((p \vee p) \wedge (p \vee r) \wedge (p \vee \neg r)) \wedge ((\neg r \vee p) \wedge (\neg r \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg r))$

$\equiv (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge p \wedge (p \vee r) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge \neg r \to$ FNC

(1 pt)

3- L'arbre syntaxique de la formule F'

$F' = \neg((q \rightarrow (p \wedge r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$



(1pt.)