Micro-interrogation : Théorie du signal. Licence ELN2 Avril 2022

Variante A

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt\,, \quad P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2\, dt\,, \quad P_{Periodic\, f} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} |f(t)|^2\, dt$$

Ex.1 - Déterminer les valeurs de l'énergie totale et de la puissance totale moyenne du signal

$$y(t) = 20e^{j(100\pi t + 0.5\pi)}$$

Séries de Fourier de $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{jnw_0 t}$ $avec\ C_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jnw_0 t}dt$,

$T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$ $période\ du\ signal,\ et\ C_n\ coefficients\ de\ Fourier$ **.**

Ex.2 - Trouver les coefficients de Fourier de :

$$y(t) = 2 + cos^2(2\pi t) + sin(\pi t + 0.5\pi)$$

Solution :

1. **Calcul de l'énergie totale:**

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|20e^{j(100\pi t+0.5\pi}\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 20^2 \underbrace{\left|e^{j(100\pi t+0.5\pi}\right|^2}_{=1} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 400dt = 400t|_{-\infty}^{+\infty} = +\infty$$

- Calcul de la puissance moyenne totale

$$P_\infty = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 20^2 dt = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T} 400t|_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} = 400\ W$$

2. **Calcul des coefficients de Fourier :**

$$y(t) = 2 + cos^2(2\pi t) + sin(\pi t + 0.5\pi)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}(1 + cos(4\pi t)) + sin(\pi t + 0.5\pi)$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}}{2}\right) + \left(\frac{e^{j(\pi t+0.5\pi)} - e^{-j(\pi t+0.5\pi)}}{2j}\right)$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{1}{4}e^{j4\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j4\pi t} + \frac{1}{2j}e^{j(\pi t+0.5\pi)} - \frac{1}{2j}e^{-j(\pi t+0.5\pi)}$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{1}{4}e^{j4\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j4\pi t} + \frac{1}{2j}e^{j0.5\pi}e^{j\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j0.5\pi}e^{-j\pi t}$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{1}{4}e^{j4\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j4\pi t} + \frac{1}{2j}je^{j\pi t} - \frac{1}{2j}(-j)e^{-j\pi t}$$

$$y(t) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}e^{j\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j\pi t} + \frac{1}{4}e^{j4\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j4\pi t}$$

$$y(t) = C_0 + C_1 e^{j\pi t} + C_{-1}e^{-j\pi t} + C_4 e^{j4\pi t} + C_{-4}e^{-j4\pi t}$$

on obtient donc : $C_0 = \frac{5}{2}, C_1 = C_{-1} = \frac{1}{2}\ , C_4 = C_{-4} = \frac{1}{4}$ ***et*** $C_n = 0\ \ \forall n \neq \{0, \pm 1, \pm 4\}$

Variante B

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt \ , \quad P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt \ , \quad P_{Periodic\,f} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} |f(t)|^2 \, dt$$

Ex.1 - Déterminer les valeurs de l'énergie totale et de la puissance totale moyenne du signal

$$x(t) = 2rect(\tfrac{t-3}{2})$$

Séries de Fourier de $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, e^{jnw_0 t}$ $avec\ C_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jnw_0 t}dt$,

$T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$ $période\ du\ signal,\ et\ C_n\ coefficients\ de\ Fourier$.

Ex.2 - Trouver les coefficients de Fourier de :

$$x(t) = -\frac{1}{2} + sin^2(2\pi t + 0.5\pi) + cos(4\pi t)$$

Solution :

1. **Calcul de l'énergie totale:**

$$x(t) = 2rect\left(\frac{t-3}{2}\right) = \begin{cases} 2 & si \quad \left|\frac{t-3}{2}\right| \le \frac{1}{2} \quad ou \quad 2 \le t \le 4 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|2rect(\frac{t-3}{2})\right|^2 dt = \int_2^4 2^2 dt = 4t|_2^4 = 4(4-2)$$

$$= 8\,Joules$$

- Calcul de la puissance moyenne totale

$$P_\infty = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_2^{+4} 2^2 dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} 4t|_2^4 = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} 8 = 0\ W$$

2. **Calcul des coefficients de Fourier :**

$$x(t) = -\frac{1}{2} + sin^2(2\pi t + 0.5\pi) + cos(4\pi t)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - cos(4\pi t + \pi)) + cos(4\pi t)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j(4\pi t+\pi)} + e^{-j(4\pi t+\pi)}}{2}\right) + \left(\frac{e^{j(4\pi t)} + e^{-j(4\pi t)}}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}e^{j\pi}e^{j4\pi t} - \frac{1}{4}e^{-j\pi}e^{-j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{j(4\pi t)} + \frac{1}{2}e^{-j(4\pi t)}$$

$$= +\frac{1}{4}e^{j4\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi t}$$

$$y(t) = \frac{3}{4}e^{j4\pi t} + \frac{3}{4}e^{-j4\pi t}$$

$$y(t) = C_1 e^{j4\pi t} + C_{-1}e^{-j4\pi t} = C_1 e^{jw_0 t} + C_{-1}e^{-jw_0 t} \ \ avec \ \ w_0 = 4\pi$$

$$on\ obtient\ donc : C_1 = C_{-1} = \frac{3}{4} \ \ et \ \ C_n = 0 \ \ \forall\, n \neq \pm 1$$