Solution : Micro-interrogation Théorie du signal. Licence ELN2 Avril 2022

Variante C

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt\ ,\quad P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2\, dt\ ,\quad P_{Periodic\,f} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} | f(t)|^2\, dt$$

Ex.1 a - Déterminer les valeurs de l'énergie totale et de la puissance totale moyenne du signal :

$$\boldsymbol{y(t) = 5e^{-0.5|t-2|}}\quad et -\infty < t < +\infty$$

Séries de Fourier de $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(\mathrm{n}w_0 t)$ *avec*

$a_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cos(nw_0 t)\, dt$, $b_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\sin(nw_0 t)\, dt$, $T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$ *période ,*

Ex.2 Trouver les coefficients de Fourier du signal :

$$y(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{2 + 3\,cos^2(2\pi t) - 5\,sin(8\pi t)}$$

Solution :

1. **Calcul de l'énergie totale:**

$$\boldsymbol{y(t) = 5e^{-0.5|t-2|}}\quad et -\infty < t < +\infty$$

$$\boldsymbol{E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|5e^{-0.5|t-2|}\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 5^2\left|e^{-|t-2|}\right|^2 dt}$$

$$\boldsymbol{= 25\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-|t-2|}\right|^2 dt = 25\int_{-\infty}^{+2} e^{t-2} dt + 25\int_{+2}^{+\infty} e^{-t+2} dt =}$$

$$\boldsymbol{= 25\, e^{-2}.\, e^{t}|_{-\infty}^{2} - 25e^{+2}.\, e^{-t}|_{+2}^{+\infty} = 25\,(e^{-2}\,[e^{+2} - e^{-\infty}] - e^{+2}[e^{-\infty} - e^{-2}])}$$

$$\boldsymbol{= 25\,(e^{-2}\,[e^{+2} - 0] - e^{+2}[0 - e^{-2}]) = 25\,(\,e^{-2}\,e^{+2} + e^{+2}e^{-2}) = 25(1+1)}$$

$$\boldsymbol{= 50\,Joules}\qquad \boldsymbol{C'est\ un\ signal\ \grave{a}\ \acute{e}nergie\ finie}$$

- Calcul de la puissance moyenne totale

$$\boldsymbol{P_\infty = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |y(t)|^2 dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} E_\infty = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} 50 = 0\ Watts}$$

2. **Calcul des coefficients de Fourier :**

$$y(t) = 2 + 3\cos^2(2\pi t) - 5\sin(8\pi t)$$

$$y(t) = 2 + 3 \times \frac{1}{2}\left(1 + \cos(4\pi t)\right) - 5\sin(8\pi t)$$

$$\text{on prend } w_0 = 4\pi \text{ , donc on peut écrire :}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos(4\pi t) - 5\sin(8\pi t)$$

$$y(t) = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\cos(w_0 t) - 5\sin(2w_0 t)$$

$$y(t) = a_0 + a_1\cos(w_0 t) + b_2\sin(2w_0 t)$$

$$\text{on obtient donc : } a_0 = \frac{7}{2}, \quad a_1 = \frac{3}{2}, \quad b_2 = -5$$

$$\text{avec } a_n = 0 \ \forall n \neq \{0,1\} \text{ et } b_n = 0 \ \forall n \neq 2$$

Variante D

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt \,, \quad P_f = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt \,, \quad P_{Periodic\, f} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} |f(t)|^2 \, dt$$

Ex.1 - Déterminer les valeurs de l'énergie totale et de la puissance totale moyenne du signal :

$$x(t) = 10 \cos^2(500\pi t + 0.5\pi)$$

Séries de Fourier de $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)$ *avec*

$a_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos(nw_0 t)\, dt$, $b_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(nw_0 t)\, dt$, $T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$ *période* ,

Ex.2 - Trouver les coefficients de Fourier du signal :

$$x(t) = sin^2\left(\frac{\pi}{4} t\right) + 5.cos\left(\frac{3\pi}{2} t\right)$$

Solution :

1. **Calcul de l'énergie totale:** $x(t) = 10cos^2(500\pi t + 0.5\pi)$

$$x(t) = 10 \times \frac{1}{2} \left(1 + cos\big(2(500\pi t + 0.5\pi)\big)\right)$$

$$= 5 + 5cos(1000\pi t + \pi) \ \ signal\ périodique$$

$$\rightarrow E_\infty = +\infty \ \ énergie\ infinie$$

- Calcul de la puissance moyenne totale

$$P_\infty = 5^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25 + 6.25 = 31.25\ Watts$$ **, signal à puissance finie**

2. **Calcul des coefficients de Fourier :**

$$x(t) = sin^2\left(\frac{\pi}{4} t\right) + 5.cos\left(\frac{3\pi}{2} t\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(1 - cos\left(2\frac{\pi}{4} t\right)\right) + 5.cos\left(\frac{3\pi}{2} t\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(1 - cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)\right) + 5.cos\left(\frac{3\pi}{2} t\right)$$

On prend $w_0 = \frac{\pi}{2}$ *ce qui donne* :

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos(w_0 t) + 5\, cos(3w_0 t)$$

$$y(t) = a_0 + a_1 cos(w_0 t) + a_3 sin(3w_0 t)$$

$$on\ obtient\ donc : \ a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = +5$$

$$avec\ \ a_n = 0\ \ \forall n \neq \{0, 1, 3\}\ et\ \ b_n = 0\ \ \forall\, n$$