Examen EMD - module : Théorie du signal   Licence : ELN2   21/06/2022

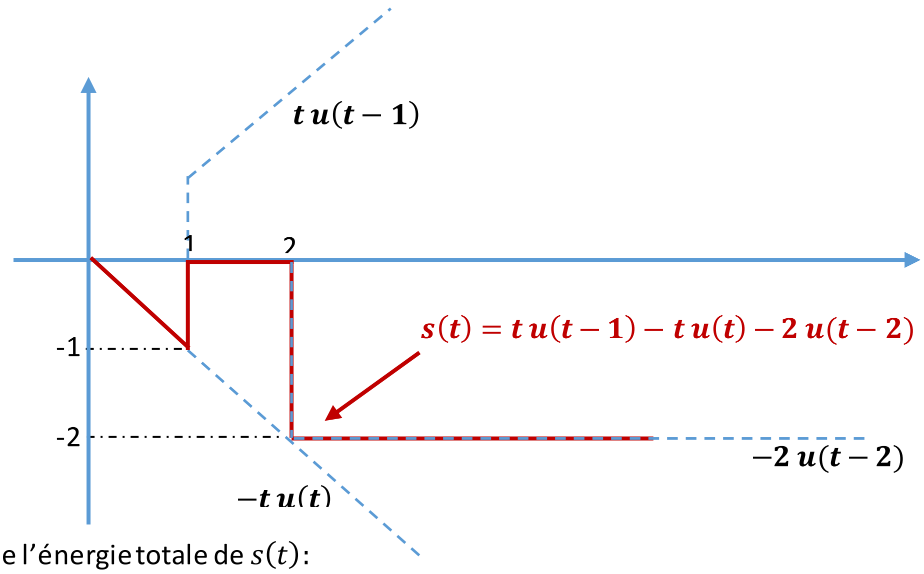
Durée : 1heure

A

1. Représenter graphiquement et calculer l'énergie et la puissance des signaux suivants :
   a. $s(t) = t\,u(t-1) - t\,u(t) - 2\,u(t-2)$
   b. Signal périodique $x(t) = rect\left(\frac{t-2}{3}\right) - 4\,rect\left(\frac{t-4}{2}\right)$, $période\ T = 5$.

Solution :

a. **Graphe de $s(t) = t\,u(t-1) - t\,u(t) - 2\,u(t-2)$**



Calcul de l'énergie totale de $s(t)$:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\,dt = \int_0^1 (-t)^2\,dt + \int_2^{+\infty} (-2)^2\,dt = \frac{1}{3}t^3|_0^1 + 4t|_2^{+\infty} = +\infty$$

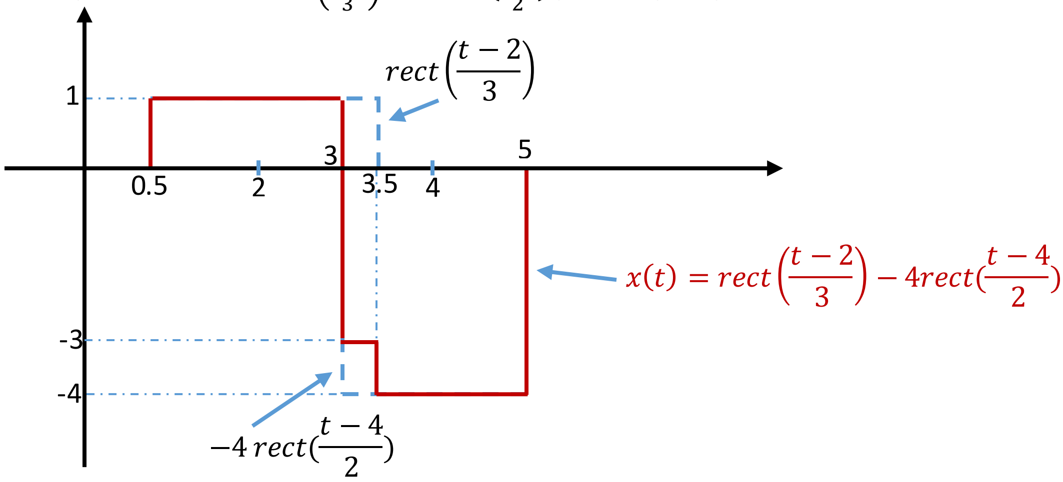
Calcul de la puissance moyenne totale de $s(t)$:

$$P_\infty = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |s(t)|^2\,dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\left[\int_0^1 (-t)^2\,dt + \int_2^{+\frac{T}{2}} (-2)^2\,dt\right] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} 4t|_2^{+\frac{T}{2}}$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{4}{T}\left[\frac{T}{2} - 2\right] = \frac{4}{2} = \mathbf{2\,Watts}$$

C'est un signal à puissance finie

b. Graphe de $x(t) = rect\left(\frac{t-2}{3}\right) - 4rect(\frac{t-4}{2})$ périodique, (période=5) :



$x(t)$ est un signal périodique donc son énergie totale est infinie.

Calcul de sa puissance moyenne sur une période :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\,dt \;\; et \;\; T = 5 \;\; donc$$

$$P = \frac{1}{5}\left[\int_{0.5}^{3} 1\,dt + \int_{3}^{3.5} (-3)^2 dt + \int_{3.5}^{5} (-4)^2 dt\right] = \frac{1}{5}\left[1 \times \frac{5}{2} + 0.5 \times 9 + \frac{3}{2} \times 16\right] = \mathbf{6.7\,Watts}$$

2. On considère le signal suivant :

$$\boldsymbol{x(t) = 2\sin(2\pi t) + cos^2\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

a. **Déterminer la période et calculer les coefficients a_n et b_n, n** $\in \mathbb{N}$, du développement en série de Fourier de ce signal.

b. **Calculer la puissance moyenne** du signal $x(t)$ ainsi que **sa valeur efficace**.

Solution :

$$x(t) = 2\sin(2\pi t) + cos^2\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(2\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right)$$

$$= 2\sin(2\pi t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + 2\sin(2\pi t) - \frac{1}{2} sin(4\pi t)$$

$$= \frac{1}{2} + 2\sin(w_0 t) - \frac{1}{2} sin(2 w_0 t) \quad avec\; w_0 = 2\pi$$

$$= a_0 + b_1 \sin(w_0 t) + b_2 sin(2w_0 t)$$

Par identification des coefficients on obtient donc :

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{2}}, \quad \boldsymbol{b_1 = 2}, \quad \boldsymbol{b_2 = -\frac{1}{2}} \quad \boldsymbol{et \;\; a_n = 0 \; \forall n \neq 0}, \quad \boldsymbol{b_n = 0 \; \forall n \neq \{1,2\}}$$

Calcul de la puissance de ce signal :

$$P = \boldsymbol{a_0}^2 + \frac{\boldsymbol{b_1}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{b_2}^2}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2^2}{2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \boldsymbol{2.375\,W}$$

Sa valeur efficace est donc $x_{eff} = \sqrt{P} = \sqrt{2.375} = \boldsymbol{1.54 \;\; unit\acute{e}\; efficace}$

3. En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, trouver la TF du signal suivant :

$$\boldsymbol{x(t) = 4\, rect(\frac{t}{2} - 2)}$$

Solution :

Sachant que $\boldsymbol{s\big(a(t-b)\big)}$ $a\ pour\ transform\acute{e}e\ de\ Fourier$ $\boldsymbol{\frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right) e^{-j2\pi f b}}$

et que $\boldsymbol{rect(t) \leftrightarrow sinc(f)}$ **on en déduit donc pour**

$\boldsymbol{x(t) = 4\, rect\left(\frac{t}{2} - 2\right) = 4\, rect\left(\frac{1}{2}(t-4)\right)}$ **on a un changement d'échelle de ½ et un retard de 4**

$$\boldsymbol{X(f)} = 4 \times 2 \times sinc(2f).e^{-j2\pi f.4} = \boldsymbol{8\, e^{-j8\pi f} sinc(2f)}$$

4. Déterminer et tracer le signal $y(t)$ tel que : $y(t) = x(t) * h(t)\ avec\ x(t) = rect\left(t - \frac{1}{2}\right)\ et\ h(t) = \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$, $*: signe\ de\ la\ convolution$

Solution :

$$y(t) = x(t) * h(t) = rect\left(t - \frac{1}{2}\right) * \left[\delta\left(t + \frac{1}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= rect\left(t - \frac{1}{2}\right) * \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) + rect\left(t - \frac{1}{2}\right) * \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$= rect\left(t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + rect\left(t - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{rect(t) + rect(t-1) = rect\left(\frac{t - \frac{1}{2}}{2}\right)}$$

$rectangle\ centr\acute{e}\ sur \frac{1}{2} et\ de\ largeur\ 2$

Graphe de la convolution :