Examen EMD - module : Théorie du signal Licence : ELN2 21/06/2022

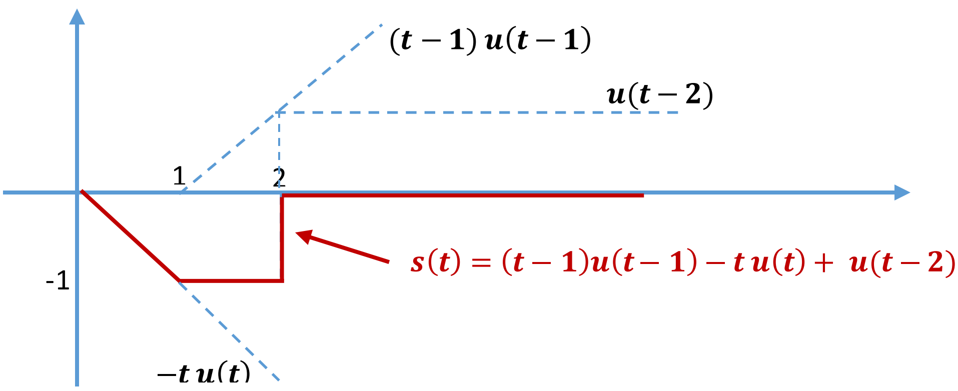
Durée : 1heure

B

1. Représenter graphiquement et calculer l'énergie et la puissance des signaux suivants :
   a. $s(t) = (t-1)u(t-1) - t\,u(t) + u(t-2)$
   b. Signal périodique $x(t) = 1 - 2\,rect\left(\frac{t-4}{2}\right)$, $période\ T = 6$.

Solution :

a. graphe du signal $s(t) = (t-1)u(t-1) - t\,u(t) + u(t-2)$



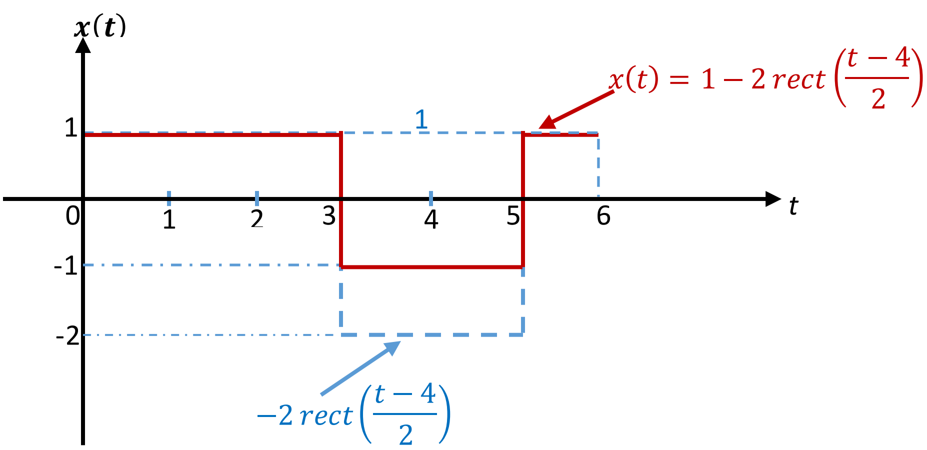
Calcul de l'énergie totale de $s(t)$:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\,dt = \int_0^1 (-t)^2\,dt + \int_1^{+2} (-1)^2\,dt = \frac{1}{3}t^3|_0^1 + t|_1^2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + (\mathbf{2}-\mathbf{1})$$
$$= \mathbf{1.33\ Joules}$$

C'est un signal à énergie finie donc la puissance moyenne totale de $s(t)$ $est\ nulle$:

$$P_\infty = \mathbf{0\ W}$$

b. graphe du signal périodique $x(t) = 1 - 2\,rect\left(\frac{t-4}{2}\right)$, $de\ période\ T = 6$



$x(t)$ est un signal périodique donc son énergie totale est infinie.

Calcul de sa puissance moyenne sur une période :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\,dt \;\; et \;\; T = 6 \;\; donc$$

$$P = \frac{1}{6}\left[\int_0^3 1\,dt + \int_3^5 (-1)^2 dt + \int_5^6 1\,dt\right] = \frac{1}{6}[1\times 3 + 1\times 2 + 1\times 1] = \mathbf{1\,Watts}$$

2. On considère le signal suivant :

$$\boldsymbol{x(t) = \sin(2\pi t) + 2\,sin^2\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

a. **Déterminer la période et calculer les coefficients a_n et b_n , n** $\in \mathbb{N}$, du développement en série de Fourier de ce signal.

b. **Calculer la puissance moyenne** du signal $x(t)$ ainsi que **sa valeur efficace**.

Solution :

$$x(t) = \sin(2\pi t) + 2\;sin^2\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin(2\pi t) + 2\times\frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(2\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right)$$

$$= \sin(2\pi t) + 1 - \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 1 + \sin(2\pi t) + sin(6\pi t)$$

$$= 1 + \sin(w_0 t) + +sin(3w_0 t) \qquad avec\ w_0 = 2\pi$$

$$= \;a_0 + b_1\sin(w_0 t) + b_3 sin(3w_0 t)$$

Par identification des coefficients on obtient donc :

$$\boldsymbol{a_0 = 1}\,, \qquad \boldsymbol{b_1 = 1}\,, \qquad \boldsymbol{b_3 = 1\;\; et\;\; a_n = 0\;\forall n \neq 0}\,, \qquad \boldsymbol{b_n = 0\;\forall n \neq \{1{,}3\}}$$

Calcul de la puissance de ce signal :

$$P = \boldsymbol{a_0}^2 + \frac{\boldsymbol{b_1}^2}{2} + \frac{\boldsymbol{b_3}^2}{2} = (1)^2 + \frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2} = \mathbf{2.0\,W}$$

Sa valeur efficace est donc $x_{eff} = \sqrt{P} = \sqrt{2.0} = \mathbf{1.41}\;\; \boldsymbol{unité\;efficace}$

3. En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, trouver la TF du signal suivant :

$$\boldsymbol{x(t) = 3\,rect(\frac{t}{3} - 1)}$$

Solution :

Sachant que $\boldsymbol{s\left(a(t-b)\right)}$ $a\ pour\ transformée\ de\ Fourier$ $\boldsymbol{\frac{1}{|a|}S\left(\frac{f}{a}\right)\,e^{-j2\pi f b}}$

et que $\boldsymbol{rect(t)} \leftrightarrow \boldsymbol{sinc(f)}$ **on en déduit donc pour**

$\boldsymbol{x(t) = 3\,rect\left(\frac{t}{3} - 1\right) = 3\,rect\left(\frac{1}{3}(t-3)\right)}$ **on a un changement d'échelle de 1/3 et un retard de 3**

$$\boldsymbol{X(f)} = 3 \times \frac{1}{\frac{1}{3}} \times sinc\left(\frac{f}{\frac{1}{3}}\right) . e^{-j2\pi f . 3} = \boldsymbol{9\,e^{-j6\pi f} sinc(3f)}$$

4. Déterminer et tracer le signal $y(t)$ tel que : $y(t) = x(t) * h(t)$

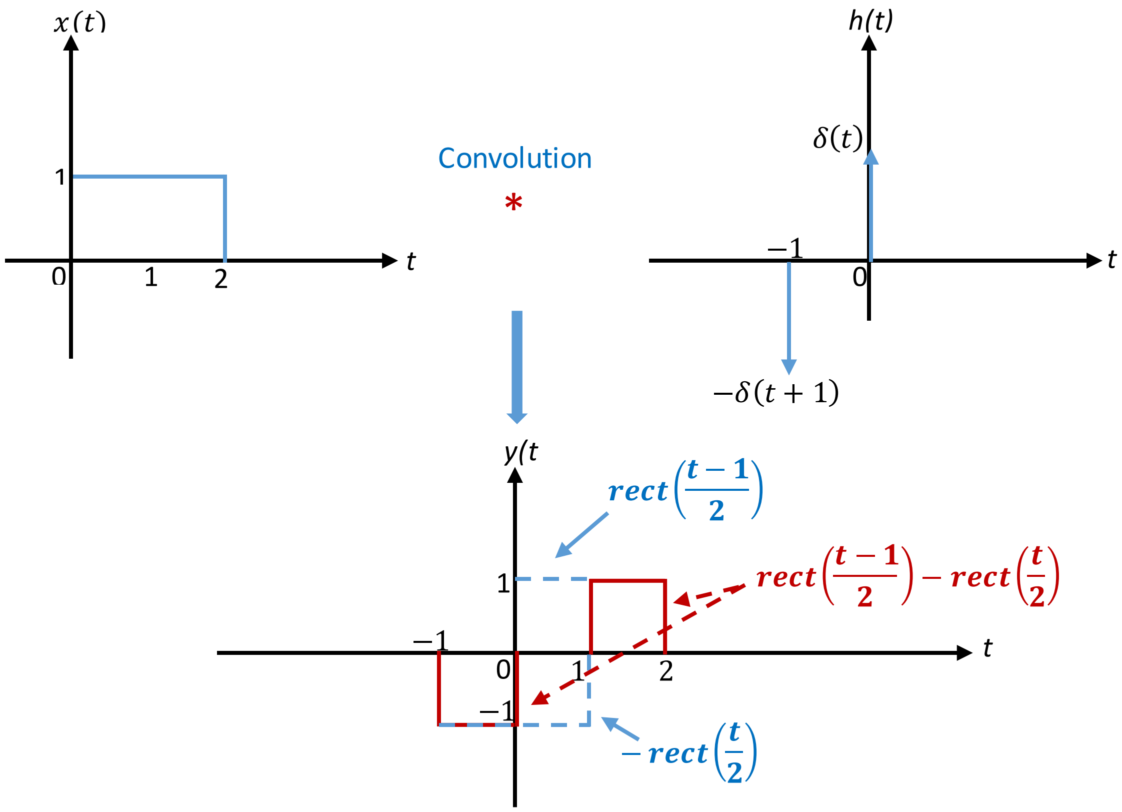
$$avec\ x(t) = rect\left(\frac{t-1}{2}\right)\ et\ h(t) = \delta(t) - \delta\left(t + \frac{1}{2}\right)\ , \qquad * : signe\ de\ la\ convolution$$

Solution :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \ rect\left(\frac{t-1}{2}\right) * \left[\delta(t) - \delta\left(t + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= rect\left(\frac{t-1}{2}\right) * \delta(t) - rect\left(\frac{t-1}{2}\right) * \delta\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

$$= rect\left(\frac{t-1}{2}\right) - rect\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{rect\left(\frac{t-1}{2}\right) - rect\left(\frac{t}{2}\right)}$$



Identités trigonométriques :

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Séries de Fourier d'un signal périodique $s(t)$:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n F_0 t) + b_n\, sin(2\pi n F_0 t)\ , \quad F_0\ fréquence\ du\ signal$$

Transformée de Fourier $X(f)$ d'un signal $x(t)$ non périodique :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt\ , \qquad f:\ fréquence$$

$Identité\ de\ la\ convolution$: $\boldsymbol{x(t) * \delta(t) = x(t)}$