Module: Méthodes numériques

Responsable du module:

Dr. H. Benlarbi

Programme

- Chapitre1: Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires (Matrices, Normes, Calcul de valeurs et vecteurs propres, méthode de Gauss, Méthode de Jordan, factorisation LU)

- Chapitre2: Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires (méthode de Jacobi et de sur-relaxation, méthode de Gauss-Siedel..)

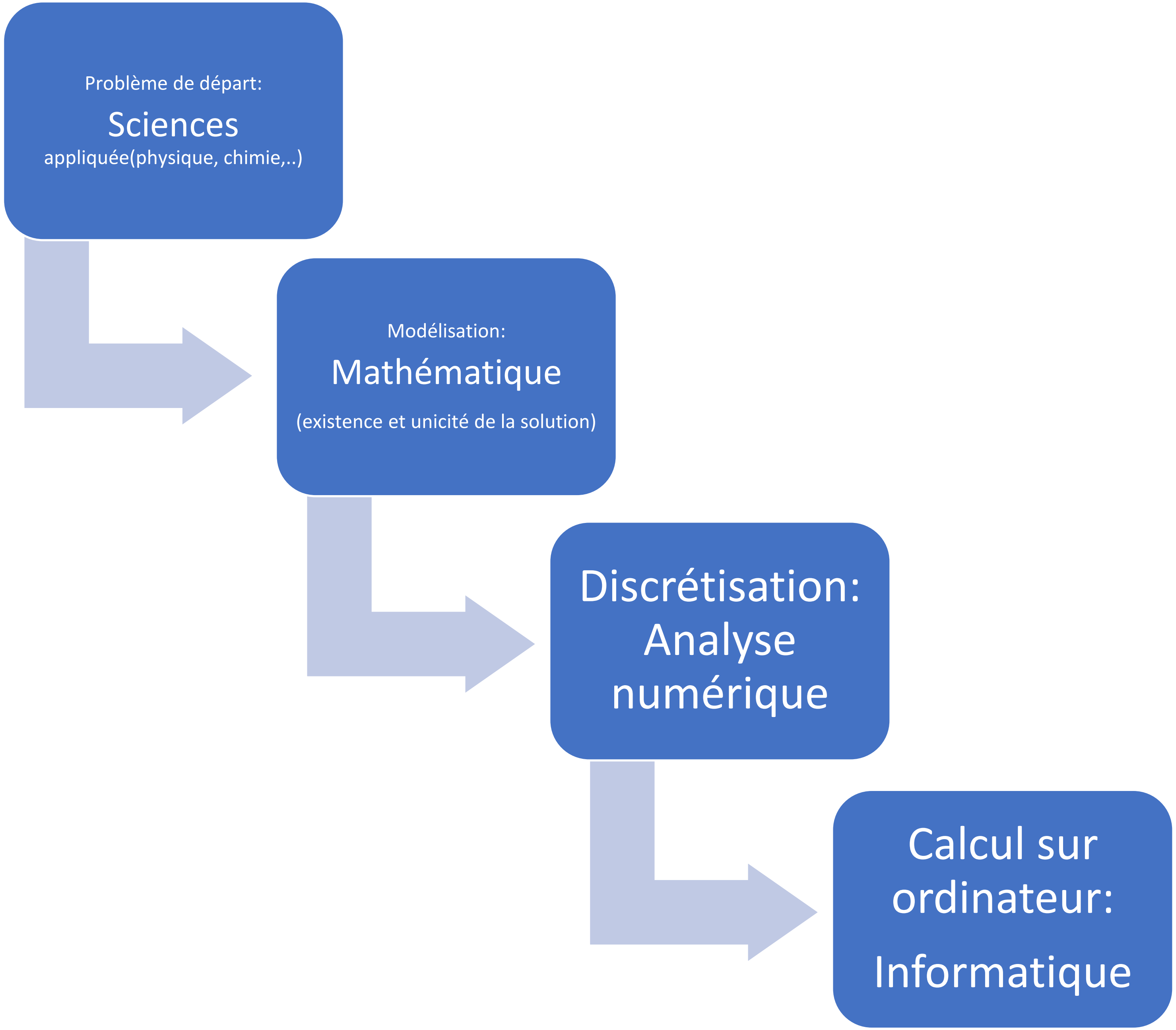
Chapitre 1: Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

- **Introduction**

- L'analyse numérique est la conception et l'étude d'algorithmes pour obtenir des solutions à des ensembles d'équations issus de modèles issus de la physique, de la biologie, de la finance ...

- **Motivation**

- Recherche et développement : études expérimentales coûteuses
- Les modèles considérés sont composés d'ensemble d'équations dont on ne sait pas déterminer de solutions explicites
- Proposer une solution approchée, calculée à l'aide de l'ordinateur.


Problème de départ:
Sciences
appliquée(physique, chimie,..)
Modélisation:
Mathématique
(existence et unicité de la solution)
Discrétisation:
Analyse
numérique
Calcul sur
ordinateur:
Informatique

1.1 Erreur absolue et Erreur relative

- **Définition:**
- 1)Soit x un réel et x^* une valeur approchée de x. on appelle **erreur absolue** de x la valeur:

$$\Delta x = |x - x^*|$$

Il est évident que

$$x^* - \Delta x \leq x \leq x^* + \Delta x$$

- 2)On appelle **erreur relative** de x la valeur:
-
- $E_x = \left|\frac{x-x^*}{x}\right| = \left|\frac{\Delta x}{x}\right|$

- L'erreur relative est souvent exprimée sous forme d'un pourcentage.

- 3) On appelle **chiffres significatifs** d'un nombre tous les chiffres de son écriture à partir du premier chiffre non nul à gauche de la virgule.

- Exemple
  - $x^* = 0{,}03045$ (4chiffres significatifs)

  - $x^* = 0{,}03045000$ (7 chiffres significatifs)

1.2 Propagation des erreurs

- Les formules suivantes nous donnent les erreurs qu'on obtient lorsque l'on effectue des opérations arithmétiques sur des valeurs connues avec une précision limité
- Pour l'erreur absolue:
  - $\Delta(x \pm y) = \Delta x + \Delta y$
  - $\Delta xy = |x|\Delta x + |y|\Delta y$
  - $\Delta\left({}^{x}/_{y}\right) = \frac{y\Delta x + x\Delta y}{y^2}$

- Pour l'erreur relative:

  - $E_{(x+y)} = \frac{\Delta x + \Delta y}{|x+y|}$
  - $E_{(x-y)} = \frac{\Delta x + \Delta y}{|x-y|}$
  - $E_{x.y} = E_x + E_y$
  - $E_{x/_{y}} = E_x + E_y$

Représentation des nombres en machines

- Tout nombre réel x s'écrit sous la forme

  - $x = (-1)^s \times \overline{0.a_1a_2\,a_3 \ldots\ldots a_N}^{\,b} \times b^e = (-1)^s \times \text{m} \times b^e$

Où: - s est le signe de x $\begin{cases} 0 & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x < 0 \end{cases}$

- N est le nombre de chiffres significatifs de x

- m est la mantisse $m = \overline{0.a_1a_2\,a_3 \ldots\ldots a_N}^{\,b}$

avec $0 \leq a_i \leq b - 1\ et\ a_1 \neq 0$

- e l'exposant

- b la base de représentation

- **Exemple:** le nombre + 59,4151 $* \; 10^{-5}$ s’écrit dans la base 10
  - +0,594151 $* \; 10^{-3}$
- 0.0121 s’écrit (dans la base 10)
  - +0.121 $* \; 10^{-1}$
- −5837.25 (s’écrit dans la base 10)
  - −0.583725 $* \; 10^{4}$

2. Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

- **2. 1 Rappels sur les matrices**
- **1) Matrice** : une matrice est un tableau de chiffres rangés en lignes et en colonnes

une matrice à 2lignes et 3 colonnes est de la forme

- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$
- **2)Ordre d'une matrice** : Une matrice d'ordre m et n possède : m lignes et n colonnes. Dans l'exemple précédent on dira que la matrice est d'ordre (2,3).

- L'ensemble des matrices de n lignes et m colonnes à coefficients réels est noté $M_{n,m}(\mathbb{R})$

- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & a_{2m} \\ . & . & & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & & . & & & . \\ . & . & & & & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- \- **Matrice colonne** : Elle ne possède qu'une seule colonne et n lignes : matrice (n,1) i.e
  - $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
- **Matrice ligne** : Elle ne possède qu'une seule ligne et m colonnes : matrice (1,m) i.e
  - $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$ exple $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matrice carrée**

C’est une matrice qui a autant de lignes que de colonnes (n=m) i.e

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{exple} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- **La diagonale** principale d'une matrice est formée par l'ensemble des éléments a_{ii}de la matrice.

- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

- **Une matrice diagonale** est donc une matrice qui a tous ses éléments nuls sauf ceux de sa diagonale principale.

- $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- **- La matrice unité** est la matrice diagonale qui n'a que des 1 dans sa diagonale principale.
  - $I_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Et on a pour toute matrice X d'ordre n, et I_n matrice unité d'ordre n
-
  - $XI_n = I_nX = X$
  -

- **Matrice triangulaire supérieur (**$a_{ij} = 0 \text{ pour } i > j$**)**
  - $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$
- **Matrice triangulaire inférieur (**$a_{ij} = 0 \text{ pour } j > i$)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- **Addition** : On ne peut additionner que des matrices de même ordre. On additionne les éléments équivalents (dans la même position dans les deux matrices) de chaque matrice i.e
  - $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$
  - $= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$

Exemple:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

2.3 Opérations sur les matrices

- **Multiplication d'une matrice par un scalaire**: Tous les éléments de la matrice sont multipliés par ce scalaire.

- $\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$

- Exemple:
  - $2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 10 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

- **Multiplication de 2 matrices *(AxB=C)*** : La multiplication n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Si A (m, p) multiplie B(p, n) alors C est une matrice d'ordre (m, n). La multiplication est effectuée en multipliant terme à terme une ligne de A avec une colonne de B et en additionnant chacun des produits. i.e

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

où $\{c_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + a_{13} b_{31}$

$\{c_{12} = a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} + a_{13} b_{32}$

$\{c_{21} = a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} + a_{23} b_{31}$

$\{c_{22} = a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} + a_{23} b_{32}$

- Exemple:
- si A est d'ordre 3 $\times$3 et B d'ordre 3 $\times$2 alors A $\times$B est d'ordre 3 $\times$2
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$

- **Matrice inversible**: Une matrice carrée *A, d'ordre n* est inversible, s'il existe une matrice qu'on note A^{-1}de même ordre que A et qui vérifie:
  - $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I_n$

2.4 Transposée d’une matrice:

- La transposée d’un matrice A ∈ $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, est la matrice notée $A^t \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, définie par
  - $a_{i,j}^t = a_{j,i}\ pour\ i = 1, .., n\ ; j = 1, .., m$
- **Exemple**:
  - $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

2.5 Déterminant de matrices

- **Définition:** Soit A $\in M_n(\mathbb{R})$une matrice carrée. Le déterminant de *A*, noté *det(A)*, est l'élément de $\mathbb{R}$ défini par récurrence de la façon suivante :
- si n = 1 alors *A* =(a_{11}) et $\det(A) = a_{11}$;
- si n ≥ 2, alors
- $\det(A) = a_{11}\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12}$+$a_{13}\Delta_{13} \ldots.+(-1)^{1+j}\, a_{1j}\Delta_{1j}$
-
- où Δ_{1j} est le déterminant de la matrice de $M_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue en enlevant à *A* la première ligne et la colonne *j* .

- **Exemples:**
- 1) det $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 - 2(-1) = 4$
- 2)det $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$-1 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$+2$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$
  - =1(0.1-2(-1))-(3.1-1.(-1))+2(3.2-0.1)=2-4+12=10

- **Remarque:**
- On peut développer le déterminant d’une matrice suivant soit la première ligne, soit la première colonne.
- **3.3 Propriétés**
- Si on multiplie l’une des lignes d’une matrice par un facteur alors le déterminant de cette matrice est multiplié par le même facteur
- Le déterminant d’une matrice ayant une ligne nulle est 0.
- Si A et B sont deux matrices carrées de même taille, alors
  - det(AB) = det(A) det(B).

- Une matrice carrée et sa transposée ont même déterminant, c.a.d
    - $detA^t = detA$
- Le déterminant de toute matrice triangulaire supérieure(inférieur) est le produit de ses éléments diagonaux.
- Si une matrice carrée a deux lignes identiques, son déterminant est nul.
- Si à une ligne d'une matrice on ajoute le produit d'un réel par une autre ligne, le déterminant est inchangé.

2.6 Inverse d'une matrice

- **Définition:**
- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n. Si il existe une matrice *B* ∈ $M_n(\mathbb{R})$ telle que
  - *AB = BA =*I_n,
- Une telle matrice *B* est unique et s'appelle l'inverse de *A*. On la note A^{-1}.
- Si A est une matrice carrée d'ordre n, alors *A* est inversible si et seulement si $detA \neq 0$

Propriétés

- Soit A et B deux matrices carrées inversibles de même taille. Alors le produit AB est inversible et son inverse est
  - $(AB)^{-1} = (B)^{-1}\,(A)^{-1}.$
- Si A est une matrice carrée inversible alors sa transposée est inversible et
  - $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- Le système linéaire $Ax = b$ admet une solution unique si et seulement si A est inversible

2.7 Calcul pratique de l'inverse d'une matrice

- A est une matrice carrée d'ordre n, si $detA \neq 0$, alors la matrice inverse de A est donnée par:
  - $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(Co)^t$
- Où la matrice (Co) appelée matrice des cofacteurs de A est définie par
  - $Co = \left(C_{ij}\right), i, j = 1, \ldots, n \; et \;\; C_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$
- Δ_{ij} étant est le déterminant de la matrice de $M_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue en enlevant à A la ligne *i* et la colonne *j* .

- Exemples: Calculer l’inverse de la matrice

  - A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- On a $\det \mathrm{A} = 10 \neq 0$, d’où A est inversible, calculons alors sa matrice inverse

  - $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(Co)^t$

- On calcule tout d’abord la matrice des cofacteurs

- $c_{11} = (-1)^{1+1}\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2;$ $c_{12} = (-1)^{1+2}\Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4$
- $c_{13} = (-1)^{1+3}\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$
- $c_{21} = (-1)^{2+1}\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3;$ $c_{22} = (-1)^{2+2}\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$
- $c_{23} = (-1)^{2+3}\Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;$
- $c_{31} = (-1)^{3+1}\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1;$ $c_{32} = (-1)^{3+2}\Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7$
- ; $c_{33} = (-1)^{3+3}\Delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3.$

- D’où la matrice des cofacteurs est
- $$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$
- Sa transposée est
- $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 7 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

- Enfin la matrice inverse de A est
- $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(Co)^t = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 7 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{5} & {}^{3}/_{10} & {}^{-1}/_{10} \\ {}^{-2}/_{5} & {}^{-1}/_{10} & {}^{7}/_{10} \\ {}^{3}/_{5} & {}^{-1}/_{10} & {}^{-3}/_{10} \end{pmatrix}$

2.8 Trace d'une matrice

- **Définition:**
- La trace d'une matrice carrée A est la somme de ses coefficients diagonaux c-a-d $tr\ A = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}$
- **Exemple:**
  - $tr\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 1 + 2 + (-1) = 2$

- **Proposition:** Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors
  - $tr\ AB = tr\ BA$

2.9 Matrices semblables

- Si *A, B* $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors *A, B* sont semblables s'il existe *P* $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que
  - $A = P.B.P^{-1}$
- **Exemple:**
- Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables, car
  - $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$; avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.10. Valeurs et vecteurs propres

- **Définitions:**
- On dit que λ est une valeur propre de la matrice A s'il existe un vecteur x non nul solution de
    - $Ax = \lambda x$
- Le vecteur x est alors dit vecteur propre associé à λ

2.11 Détermination des valeurs et vecteurs propres d'une matrice

- **Théorème:** λ est une valeur propre de la matrice A si et seulement si
  - $\det(A - \lambda I) = 0$
- Le polynôme $\det(A - \lambda I)$ est dit polynôme caractéristique de la matrice *A*,
- Donc trouver les valeurs propres de A, revient à chercher les racines du polynôme caractéristique de la matrice *A.*

Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, on cherchera les vecteurs propres $x_1, x_2, \dots, x_n$ associés à chaque valeur propre, solutions de

$Ax_i = \lambda\, x_i$ ou bien $(A - \lambda \mathrm{I}\,)x_i = 0$

- Exemple: trouver les valeurs et les vecteurs propres de la matrice A
  - $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- 1) Les valeurs propres de A sont les solution de $\det(A - \lambda I) = 0$
  - det $(A - \lambda I) = \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ $= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)$
- D'où $\det(A - \lambda I) = 0$ si et seulement si λ_1=1; λ_2=-1

- 2) Vecteurs propres
- Pour λ_1=1, le vecteur propre $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associé est solution de
  - $(A - 1I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$
- C-a-d
- $\begin{pmatrix} 1-1 & 2 \\ 0 & -1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2y \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- D'où le le vecteur propre $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associé à λ_1=1 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

- Pour λ_2=-1, le vecteur propre $\binom{x}{y}$ associé est solution de
  - $(A-(-1)I)\binom{x}{y}=0$
- C.-à-d.
- $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\binom{x}{y}$= $\binom{0}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 0 \end{pmatrix} = \binom{0}{0} \Leftrightarrow \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- D'où le le vecteur propre $\binom{x}{y}$ associé à λ_2=-1 est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

2.12 Normes matricielles

- **Définition:** Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ est une matrice carré d'ordre n, alors on définit les normes matricielles suivantes:
  - $\|A\| = \max\limits_{i} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$
  - $\|A\| = \max\limits_{j} \sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$
  - $\|A\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{2}}$

3 Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

- **3.1 Généralités**
- Soit à résoudre un systèmes linéaires
- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

- Qu’on peut écrire sous forme matricielle
  - $A\,X = b$
- Avec
  - $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} . & . & . & . a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} . & . & . & . a_{2n} \\ . & . & & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ $et\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$

- Pour résoudre ce genre de système, la première idée qui nous vient à l’esprit est l’utilisation des formules de Cramer données par

- $x_i = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & \dots a_{1i-1} & b_1 & . & . a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}. & \dots & a_{2i-1} & b_2. & . & . a_{2n} \\ . & . & \dots \dots \dots . & & & & . \\ . & . & \dots \dots \dots \dots & & . & & . \\ . & . & & & . & & . \\ . & . & & & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ni-1} & b_m \dots & & a_{mn} \end{vmatrix}$

- Il en résulte que pour la résolution du système (1) par ces formules nécessite au total $T_{Cramer} = (n+1)^2 . n! - 1$ opérations élémentaires, par exemple pour *n = 5*, on a $T_{Cramer} = 4319$ et pour *n = 10*, on a $T_{Cramer} \sim 4.10^8$.

Dans ce cas, elle devient très lente en temps d’éxécution (de calculs) dés que *n* dépasse *4*.

- Une autre méthode consiste calculer la matrice inverse de A, cest dire :

$$X = A^{-1}b$$

- Pour cela, on utilise au total $T_{inverse} = n!\,(n^2 + n + 1) + 3n^2 - 1$ opérations élémentaires, par exemple pour n = 5, on a $T_{inverse} = 3790$ et pour *n = 10*, on a $T_{inverse} \sim 4.\,10^8$
- Cette méthode n’est donc pas plus avantageuse que la première.
- Pour cela, nous allons apprendre des méthodes plus rapides et moins rentables pour résoudre de telles problèmes.
- **Définition 1.1:** Une méthode de résolution d’un système linéaire est dite directe si la solution du système peut être obtenue en un nombre fini d’opérations.

- On ne change pas la solution d’un système linéaire lorsque :
- On permute deux lignes,
- On permute deux colonnes,
- On multiplie une ligne par un réel non nul,
- On ajoute une ligne à une autre.
- Nous allons donc utiliser ces transformations pour se ramener à un cas simple.

3.2 Méthode d'élimination de Gauss

- **Principe:** La méthode de Gauss consiste à transformer le système initial (1) en un système équivalent
  - $A'X = b'$
- avec A'matrice triangulaire supérieur.
- On passe par deux étapes:
- 1- Triangularisation
- 2- Une remontée (solution d'un système triangulaire).

3.2.1 Résolution d'un système triangulaire

- Si A est une matrice triangulaire supérieure, et si aucun élément diagonal n'est nul, la solution du système $Ax = b$ est
- $$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}} ; i = n-1, .., 1 \end{cases}$$
- Si A est une matrice triangulaire inférieure, et si aucun élément diagonal n'est nul, la solution du système $Ax = b$ est
- $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}} ; i = 2, .., n \end{cases}$$

- **Exemple:** Soit à résoudre le système ci-dessous

- $$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad\quad 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ \qquad\qquad\qquad 2x_3 = 1 \end{cases}$$

- Qu'on peut écrire sous la forme matricielle

- $$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 2x_2 - 2x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- D’où par identification, on a de la 3èmè équation
  - $2x_3 = 1 \leftrightarrow x_3 = {}^{1}/_{2}$
- Qu’on remplace dans la 2èmè équation, on obtient
  - $2x_2 - 2x_3 = 2 \leftrightarrow x_2 = \frac{2+2({}^{1}/_{2})}{2} = {}^{3}/_{2}$
- Et enfin, de la 1èrè équation, on trouve:
  - $3x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \leftrightarrow x_1 = \frac{1-3({}^{3}/_{2})-{}^{1}/_{2}}{3} = -\,{}^{4}/_{3}$
- La solution du système est donc est: $\begin{pmatrix} -{}^{4}/_{3} \\ {}^{3}/_{2} \\ {}^{1}/_{2} \end{pmatrix}$

- **Exemple:** Soit à résoudre le système ci-dessous
- $$\begin{cases} 3x_1 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$
- Qu'on peut écrire sous la forme matricielle
- $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- D’où par identification, on a
  - $3x_1 = 3 \leftrightarrow x_1 = 1$
  - $2x_1 - 2x_2 = 2 \leftrightarrow x_2 = \frac{2x_1-2}{2} = 0$
  - $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \leftrightarrow x_3 = \frac{x_1+2x_2-2}{2} = -{}^{1}/_{2}$
- La solution du système est donc
  - $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -{}^{1}/_{2} \end{pmatrix}$

A. Triangularisation

- La méthode utilise :
- la multiplication par un scalaire
- la somme de deux lignes.
- Le but de la méthode est d’annuler progressivement les coefficients qui se trouvent sous la diagonale.

Triangularisation

- On commence avec *A* une matrice *n* lignes et *m* colonnes (les mêmes opérations seront effectuées sur le vecteur *b)*
- Il y a n étapes :
- À l'étape k, on annule sous la diagonale les coefficients de la colonne k .
- À chaque ligne i > k, on soustrait la ligne k multipliée par $\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ i.e
  - $\forall j, k \; < \; j \; \leq \; m \, et \;\; k < i \leq n \quad on \, a$
  - $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}$
  - $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \; \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}$ *pour i=1….n*

B) Remontée (solution d'un système triangulaire)

- Après avoir triangulariser la matrice *A*, on résout le système à matrice triangulaire supérieur obtenu par remontée :

- $$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \; pour \; i = n-1, \ldots 1 \end{cases}$$

- Remarques: 1)La méthode de l’élimination de Gauss consiste éliminer tous les termes sous la diagonale de la matrice A en utilisant au total
- $T_{Gauss} = (4n^3 + 9n^2 - 7n)/6$ opérations élémentaires, par exemple pour *n = 5*; T_{Gauss} = 115 et pour *n = 10*; T_{Gauss} = 805. Ce qui montre l’énorme amélioration que cette méthode apporte par rapport aux deux autres méthodes
- 2) La méthode de Gauss permet de calculer le déterminant de la matrice A, et ceci en utilisant le faite que
- $\det A = (-1)^p \prod_{k=1}^{k=n} a_{kk}^{(k)}$; où p est le nombre de permutations,

- **Exemple:**
- Résoudre par la méthode de Gauss le système suivant
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$
- **Etape 1**: annuler les éléments encadrés, pour cela on effectue les opérations suivantes:

- $l_2 \leftarrow l_2 - l_1$
- $l_3 \leftarrow l_3 - l_1$

- On obtient le nouveau système:

- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- **Etape 2**: annuler l'élément encadré en effectuant l'opération
  - $l_3 \leftarrow l_3 - l_2$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ -x_2 - x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **Résolution**
  - $x_3 = -1$
  - $x_2 = \frac{1+(-1)}{-1}$=0
  - $x_1 = \frac{4-2(0)-3(-1)}{1} = 7$
- D’où la solution du système est $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et on det $A = 1 \times (-1) \times (-1) = 1.$

Algorithme d'élimination de Gauss

- Pour *i=1,…..,n-1*
- - Pour *j=i+1,…..,m*
- - $b_j = b_j - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} b_i$
- Pour *k=i,…..,n*
- $a_{jk} = a_{jk} - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} a_{ik}$
- Fin
- Fin
- Fin

Algorithme de Résolution d'un système triangulaire

- $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$
- Pour *i=n-1,…..,1*
- $x_i = b_i$
- Pour *k=i+1,….,n*
- $x_i = x_i$- $a_{ik}\, x_k$
- Fin
- $x_i = \frac{x_i}{a_{ii}}$
- Fin

Matrices augmentées

- Pour appliquer la méthode de gauss pour le système,
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$
- On pourra effectuer toutes les opérations pour diagonaliser la matrice A sur la matrice augmentée ci-dessous
- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

- C.a.d:
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \bigg| 4 \\ 0 & -1 & -1 & \bigg| 1 \\ 0 & -1 & -2 & \bigg| 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \bigg| 4 \\ 0 & -1 & -1 & \bigg| 1 \\ 0 & 0 & -1 & \bigg| 1 \end{pmatrix}$$
- Ce qui est équivaut à
  - $x_3 = -1$
  - $x_2 = \frac{1+(-1)}{-1}$=0
  - $x_1 = \frac{4-2(0)-3(-1)}{1} = 7,$
  - d'où la solution du système est $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

3.2 Méthode de Gauss-Jordan

- La méthode de Gauss-Jordan consiste à transformer le système (1) en un système à matrice diagonale, qu'on peut écrire:
    - $A\,X = B \quad \sim \quad IX = B'$
- et dont la solution est
    - $X = B'$

- Exemple: Résoudre le système suivant par la méthode Gauss-Jordan
- $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \end{cases}$
- On établit la matrice augmentée correspondante et on applique la première étape de Gauss-Jordan, le pivot est 1
- $\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right)$

- Pour annuler 3 et 2 de la première colonne, on effectue les opérations suivantes:
  - $l_2 \leftarrow l_2$-3 l_1
  - $l_3 \leftarrow l_3$- 2l_1
- On a
- $$\left(\begin{array}{ccc|c} (1) & -1 & 2 & 5 \\ 0 & (5) & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$$
- le nouveau pivot est ensuite 5

- La deuxième ligne est multipliée par 1/5, et $l_3 \leftarrow l_3 + l_2$, le nouveau pivot est -7 :
- $\begin{pmatrix} (1) & -1 & 2 & 5 \\ 0 & (1) & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (1) & -1 & 2 & 5 \\ 0 & (1) & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (-7) & -21 \end{pmatrix}$
- On divise la 3ème ligne par -7 :
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & (1) & 3 \end{pmatrix}$
- On a obtenue ce qu'on appelle matrice échelonnée.

- On va procéder à annuler les coefficient qui sont sur la diagonale, pour cela on va aller de la 3ème colonne et annuler le 2 et le 1 en faisant
  - $l_1 \leftarrow l_1$-2 l_3
  - $l_2 \leftarrow l_2$+ l_3
- Ce qui donne
  - $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

- Il nous reste à annuler le -1 de la 1ère ligne, on effectue $l_1 \leftarrow l_1 + l_2$
- D'où
- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$
- La solution du système est ainsi:
- $$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

- Cet algorithme permet aussi de calculer le déterminant d'une matrice, c'est le produit des a_{kk}^{k-1}, qui sont choisit comme pivot à chaque itération. Si l'algorithme s'arréte parce qu'il n y a plus de pivot non nul, alors la matrice n'est pas inversible, son déterminant est nul.
- Donc, pour l'exemple précèdent, on a
  - *det A*=(1).(5).(-7)=-35

Inversion de matrice par la méthode de Gauss-Jordan

- On peut calculer la matrice inverse de A par cette méthode et ceci en l'appliquant au système *AX=I*. on écrit aussi
  - $(A|I) \sim (I|A^{-1})$
- Reprenons l'exemple précèdent et calculant l'inverse de
  - $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$
- On va appliquer la méthode de G-J en utilisant la matrice augmentée
  - $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

- Et on va suivre les mêmes transformation qu’auparavant
-
- $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & {}^{-3}/_{5} & {}^{1}/_{5} & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

- $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & {}^{-3}/_{5} & {}^{1}/_{5} & 0 \\ 0 & 0 & -7 & {}^{-13}/_{5} & {}^{1}/_{5} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & {}^{-3}/_{5} & {}^{1}/_{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & {}^{13}/_{35} & {}^{-1}/_{35} & {}^{-1}/_{7} \end{array}\right)$$

- $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & {}^{9}/_{35} & {}^{2}/_{35} & {}^{2}/_{7} \\ 0 & 1 & 0 & {}^{-8}/_{35} & {}^{6}/_{35} & {}^{-1}/_{7} \\ 0 & 0 & 1 & {}^{13}/_{35} & {}^{-1}/_{35} & {}^{-1}/_{7} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & {}^{1}/_{35} & {}^{8}/_{35} & {}^{1}/_{7} \\ 0 & 1 & 0 & {}^{-8}/_{35} & {}^{6}/_{35} & {}^{-1}/_{7} \\ 0 & 0 & 1 & {}^{13}/_{35} & {}^{-1}/_{35} & {}^{-1}/_{7} \end{array}\right)$$

- D’ou la matrice inverse est

- $$\begin{pmatrix} 1/35 & 8/35 & 1/7 \\ -8/35 & 6/35 & -1/7 \\ 13/35 & -1/35 & -1/7 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Gauss-Jordan

- Pour *k=1,.....,n*
- s'il existe une ligne $i \geq k$ telle que $a_{ik}^{k-1} \neq 0$,
- Échanger cette ligne i et la ligne k; $l_i \leftrightarrow l_k$
    - $l_k^k = \frac{1}{a_{kk}^{k-1}} l_k^{k-1}$
- Pour i=1,..,n et $i \neq k$
- $l_i^k = l_i^{k-1} - a_{ik}^{k-1} \times l_k^k$
- Sinon, A n'est pas inversible, stop

3.3 Factorisation LU

- **Principe:**
- La méthode repose sur la décomposition de la matrice A en
  - $A=L\ U$
- *Où* L est une matrice triangulaire inférieur et U est une matrice triangulaire supérieur.
- Dans ce cas, le système (1) devient
  - $LU\ X=b \qquad (2)$
- Soit en posant $U\ X=Y$, on aura
  - $LY=b \quad (3)$
- On résout le système (3) pour trouver Y puis le système $U\ X=Y$ pour trouver X solution de (1)

Description de la méthode

- En développant l'équation matricielle *A=L U*

- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}. & . & . & .a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}. & . & . & .a_{2n} \\ . & . & & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0. & .0 \\ l_{21} & l_{22}.0 & & . & . & .0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots\dots\dots & & & .l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12}. & . & . & .u_{1n} \\ 0 & u_{22} & . & . & .u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{31} & . & u_{3n} \\ 0 & 0 & & . & u_{4m} \\ . & . & & . & . \\ . & . & & & u_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0\ 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- Pour déterminer les matrices L et U , on a calculer les coefficients (l_{ij}) et (u_{ij}) à partir de l'égalité ci –dessous.
- En effet, on a $a_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} l_{ik}u_{kj}$ et comme
- $l_{ik} = 0 \ pour\ k > i;\ u_{kj} = 0\ pour\ k > j$, on a les équations suivantes pour tout $r = 1, .., n$:
  - $u_{rj} = \left[a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}\, u_{kj}\right]/l_{rr}\ pour\ j = r, .., n$
  - $l_{ir} = \left[a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}\, u_{kr}\right]/u_{rr}\ pour\ i = 1, .., r$

- Remarques : 1-On a $n^2 + n$ inconnues avec n^2 coefficients connus a_{ij}. Donc on doit fixer n paramètres dans les équations ci-dessous.
- 2-Il faut souligner que la décomposition *LU* n'est pas unique, donc il faut faire au préalable des choix arbitraires. Les deux choix les plus populaires consistent imposer que la matrice *U* ait des 1 sur la diagonale (décomposition de Crout) ou bien que la matrice *L* ait des 1 sur la diagonale (décomposition de Doolittle).

- Algorithme de Doolittle
- $l_{ii} = 1; i = 1, .., n$
- $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj};$ $\quad i = 1, .., n \;\; et \;\; j = i, .., n$
- $l_{ij} = \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj}\right] / u_{jj};$ $\quad j = 1, .., n \; et \;\; i = j + 1, .., n$
- Algorithme de Crout
- $u_{ii} = 1; i = 1, .., n$
- $l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj};$ $\quad i = j, .., n \;\; et \;\; j = 1, .., n$
- $u_{ij} = \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj}\right] / u_{jj};$ $\quad i = 1, .., n \; et \;\; j = i + 1, .., n$

Algorithme de la factorisation LU(Doolittle)

- Pour i=1,2,….,n (le calcul de la première ligne de U et la première colonne de U)
- $l_{ii} = 1$
- $u_{1i} = a_{1i}$
- $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$
- Fin

Suite de l'algorithme

- le calcul alternatif des lignes de U et colonnes de L
- Pour i=2,3,…,n
- Pour j=i,..,n
- $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj}$
- Fin
- Fin

- Pour j=2,3,…,n
- Pour i=j+1,..,n
- $l_{ij}= \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj}\right]/u_{jj}$
- Fin
- Fin

- **Exemple**: Résoudre par la méthode de Factorisation le système suivant
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- **Etape 1: Factorisation de la matrice *A=LU***
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} =$$
- A= $$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$$

- Ainsi, on identifiant les coefficients des deux matrices on tire les valeurs de la matrice *U* et *L;*
  - $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- **Etape 2: Résolution du système**
- Le système $AX = b$ devient $LUX = b$, soit en posant
  - $Y = UX$, d'où on aura $LY = b$
- On résout en premier le système $LY = b$ avec *L* matrice triangulaire inferieur et puis on résout UX= Y avec *U* matrice triangulaire supérieur

Pour $LY = b$ qui est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Admet la solution

$$y_1=4;\ y_2=1;\ y_3 = 1$$

D'où

$$Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On résout maintenant le deuxième système $UX = Y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Dont la solution est

- $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- De la solution du système
  - $AX = B$
- Et On décomposant la matrice A en
  - $A = LU$
- En déduit le déterminant de la matrice A par
  - $\det A = \det(LU) = detL.detU$

- Comme le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux de cette matrice, on obtient
  - $detA = \prod_{i=1}^{i=n} l_{ii} . \prod_{i=1}^{i=n} u_{ii}$.
- Comme pour Doolittle, $l_{ii} = 1$, on a donc $detA = \prod_{i=1}^{i=n} u_{ii}$.
- De même pour Croot, on a $u_{ii} = 1$, ce qui donne $detA = \prod_{i=1}^{i=n} l_{ii}$.

- Exemple: reprenons notre matrice A de l'exemple précédent
  - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Et sa décomposition
  - $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Alors, on déduit que
  - $\det A = (1. -1. -1) = 1$

3.4 Décomposition de Cholesky

- **Rappels:**
- 1. **Transposée d'une matrice**:
- La transposée d'un matrice A ∈ $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, est la matrice notée $A^t \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, définie par
  - $a_{i,j}^t = a_{j,i}\ pour\ i = 1, .., n\ ; j = 1, .., m$
- **Exemple:**
  - $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Matrices symétriques définies positives

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$est dite définie symétrique positive si
- 1.$A^t = A$(A symétrique)
- 2. $X^tAX \geq 0;\ \forall X \ \in (\mathbb{R})^n$ (A positive)
- 3. X^tAX=0 si et seulement si $X = 0$(définie)

3.4.1 Théorème de Cholesky

- Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle définie positive, il existe au-moins une matrice B triangulaire inférieure telle que
  - $A = BB^t$
- Supposant que A est une matrice symétrique définie positive, alors on a:
  - $AX = b \Leftrightarrow B.(B^t\mathrm{X}) = \mathrm{b} \Leftrightarrow \begin{cases} BY = b \\ B^tX = Y \end{cases}$

- Décomposition de Cholesky:
- 1. $b_{11} = \sqrt{a_{11}}$
- 2. Pour i=2,..,n $b_{i\,1} = \frac{a_{i1}}{b_{11}}$
- 3. Pour i=2,..,n-1 $b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{k=i-1} b_{ik}}$
- 4. Pour i=j+1,..,n; $b_{ij} = \frac{\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{k=j-1} b_{jk} b_{ik}\right)}{b_{jj}}$; j=1,..,n
- 5. $b_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{k=n-1} b_{nk}^2}$

- Exemple:
- $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 2\\ 1 & 2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11} & 0 & 0\\ b_{21} & b_{22} & 0\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & 0 & 0\\ b_{21} & b_{22} & 0\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}^{t}$
- $=\begin{pmatrix}b_{11} & 0 & 0\\ b_{21} & b_{22} & 0\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{21} & b_{31}\\ 0 & b_{22} & b_{32}\\ 0 & 0 & b_{33}\end{pmatrix}=$
- $\begin{pmatrix}{b_{11}}^2 & b_{11}b_{21} & b_{11}b_{31}\\ b_{21}b_{11} & {b_{21}}^2+{b_{22}}^2 & b_{21}b_{31}+b_{22}b_{32}\\ b_{31}b_{11} & b_{21}b_{31}+b_{22}b_{32} & {b_{31}}^2+{b_{32}}^2+{b_{33}}^2\end{pmatrix}$

- En identifiant , on obtient
- $b_{11} = \sqrt{1} = 1;\ b_{21} = \frac{2}{b_{11}} = 2, b_{31} = \frac{1}{b_{11}} = 1,$
- ${b_{21}}^2 + {b_{22}}^2 = 5$ d'où $b_{22} = \sqrt{5 - {b_{21}}^2} = 1$
- $b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} = 2$ d'où $b_{32} = \frac{2 - b_{21}b_{31}}{b_{22}} = 0$
- ${b_{31}}^2 + {b_{32}}^2 + {b_{33}}^2 = 7$ d'où $b_{33} = \sqrt{7 - {b_{31}}^2 + {b_{32}}^2} = \sqrt{6}$

- D’où la matrice B est
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$
- Donc résoudre le système
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$
- Revient à résoudre les deux systèmes ci dessous

- $BY = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
- Dont la solution est
- $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ \sqrt{6}/_3 \end{pmatrix}$

- Et
  - $B^t X = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix}$
- Qui a pour solution
  - $X = \begin{pmatrix} 29/3 \\ -3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$
- La méthode de Cholesky utilise, $T_{Cholesky} = (2n^3 + 15n^2 + n)/6$ opérations élémentaires, par exemple pour *n = 5*; $T_{Cholesky}$ = 101 et pour *n = 10*; $T_{Cholesky}$= 585