Série d’exercices corrigé:

Résolution de système linéaires par les méthodes directes et indirectes

Exercice 1

- Résoudre le système suivant par la méthode d'élimination de Gauss et en déduire le déterminant de la matrice du système

- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 28 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- La méthode d'élimination de Gauss consiste à transformer le système en un système à matrice triangulaire supérieur. Pour cela nous allons effectuer des opérations sur la matrice A et le vecteur second membre.

- 1)On choisit la première ligne comme pivot et on doit annuler le premier terme de chacune des lignes 2,3 et 4 en les remplaçant comme suit

- $l_2 \leftarrow l_2$-2 l_1; $l_3 \leftarrow l_3$-4 l_1; $l_4 \leftarrow l_4$+3 l_1, on aura alors

- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & -2 & -15 \\ 0 & 7 & 6 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ -32 \\ 45 \end{pmatrix}$$

- 2) Choisissant la deuxième ligne comme pivot et annulant le deuxième terme de chacune des lignes 3 et 4 par:

- $l_3 \leftarrow l_3$- $\frac{-6}{-4} l_2$; $l_4 \leftarrow l_4$- $\frac{7}{-4} l_2$ ce qui donne

- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & \frac{19}{2} & \frac{21}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ -35 \\ \frac{97}{2} \end{pmatrix}$$
- 3) Enfin on choisira la troisième ligne et on annulera le troisième terme de la ligne 4 par $l_4 \leftarrow l_4$- $\frac{19}{-10} l_3$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ -35 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Etape 2: la résolution:

- On effectue le produit de la matrice et le vecteur, on obtient

- $$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \\ -4x_2 + 2x_3 - 5x_4 \\ -5x_3 - \frac{15}{2}x_4 \\ -9x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ -35 \\ -18 \end{pmatrix}$$

- Et en identifiant les coordonnées des deux vecteurs ci-dessus, Il est évident qu'à partir de la quatrième ligne on a :
  - x_4=2

- De la troisième, on obtient $x_3 = \frac{-35+\frac{15}{2}x_4}{-5}$=4;
- De la deuxième ligne, on tire $x_2 = \frac{2-2x_3+5x_4}{-4}$=-1
- Et enfin, de la première ligne on a
  - $x_1 = 13 - 2\ x_2$-3 x_3-4 x_4=3
- D'où la solution de notre système est
  - $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Remarque

- Dans les formules de Gauss, au k-ème passage on divise les coefficients de la k-ème ligne par le terme$a_{kk}^{(k-1)}$. Ce terme est appelé pivot. La division des termes n’est possible que si le pivot est non nul.
- Vu que dans un système, l’ordre des équations n’a aucune importance, on peut toujours permuter deux lignes et obtenir un pivot non nul.
- Si parmi les équations suivantes, il n’existe aucune equation qui peut être permuter avec la ligne k, le déterminant de la matrice initiale est nul.

- 2) En déduire le déterminant de la matrice du système
- On a
  - $\det A = (-1)^p \prod_{i=1}^{i=n} a_{ii}^{(k)}$
- où p est le nombres de permutations effectués
- Puisque, nous n'avons permuté aucune ligne, on obtient
  - $\det A = \prod_{i=1}^{i=n} a_{ii}^{(k)}$ =1(-4)(-5)(-9)=-180

- Résoudre le système suivant par la méthode d'élimination de Gauss et en déduire le déterminant de la matrice du système
- $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- Vu que le premier élément de la matrice est nul, pivot nul, on doit permuter la ligne 1avec la ligne 2 pour pouvoir appliquer la méthode de Gauss, donc on va effectuer $l_1 \leftarrow l_2$, $l_3 \leftarrow l_3 + {}^{1}/_{2}\, l_1$

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{5}{2} & 4 \end{array}\right)$
- Puis $l_3 \leftarrow l_3 - {}^{9}/_{2}\, l_2$, on obtient
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$

- D’où la solution du système:
- De la troisième, on obtient $z = \frac{1}{4}$;
- De la deuxième ligne, on tire $y = 1 - z = \frac{3}{4}$
- Et enfin, de la première ligne on a
  - $x = \frac{2-y-3z}{2} = \frac{1}{4}$
- La solution du système est $X = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)^t$

- On déduit le déterminant de la matrice du système par
  - $\det A = (-1)^p \prod_{i=1}^{i=n} a_{ii}^{(k)}$
- Et comme on a effectuer une permutation de ligne, p=1, ce qui donne
  - $\det A = -(2)(1)(-2) = 4$

EXERCICE 2 :

- Résoudre le système suivant par la méthode de Gauss-Jordan, en déduire le déterminant de la matrice du système et Trouver la matrice inverse
- $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$
- On va effectuer les transformations sur la matrice augmentée ci-dessous
- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 8 \\ 3 & 3 & -5 & 14 \\ 4 & 5 & -2 & 16 \end{array}\right)$$

- Commençons par diviser la première ligne par ½, et puis $l_2 \leftarrow l_2$-3 l_1;
- $l_3 \leftarrow l_3$-4 l_1, on aura
- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & 4 \\ 0 & 3/2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$
- Le pivot étant 3/2, divisant la deuxième ligne par 3/2, et $l_3 \leftarrow l_3$-3 l_2
- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

- Maintenant, on va annuler les éléments qui sont sur la diagonale en faisant $l_1 \leftarrow l_1$+2 l_3 $et l_2 \leftarrow l_2$−2/3 l_3, ce qui donne
  - $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$
- Enfin, par $l_1 \leftarrow l_1$-1/2 l_2, on obtient
  - $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$
- Ce qui donne la solution du système $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Le déterminant de la matrice de notre système est le produit des pivots
  - $det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} = 2 * \frac{3}{2} * 4 = 12$
- Calcul de l'inverse: on va appliquer les transformations ci-dessus sue la matrice
  - $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$
- $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -7/6 & 1 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 19/12 & -3/2 & 7/12 \\ 0 & 1 & 0 & -7/6 & 1 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$
- D’où la matrice inverse est
- $\begin{pmatrix} 19/12 & -3/2 & 7/12 \\ -7/6 & 1 & -1/6 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 :

1) Donner la factorisation *L U* de la matrice suivante :

- $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

- 2)En déduire le déterminant de la matrice *A*

- 3)Résoudre le système *AX=b* par la factorisation *L U* où $b = (-47\ \ -12\ \ 18)^t$.

- 1) la factorisation $L\ U$
  - $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} =$

  - $\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$

Par identification terme à terme les éléments des deux matrices, on obtient

- u_{11}=4; u_{12}=-9; u_{13}=2;
- $l_{21}u_{11} = 2 \Longrightarrow l_{21} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $l_{31}u_{11} = -1 \Longrightarrow l_{31} = \frac{-1}{4}$;
- $l_{21}u_{12} + u_{22} = -4 \Longrightarrow u_{22} = -4 - l_{21}u_{12}$= $\frac{1}{2}$;
- $l_{21}u_{13} + u_{23} = 4 \Longrightarrow u_{23}$=4- $l_{21}u_{13}$=3;

- $l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 2 \Longrightarrow l_{32} = \frac{2-l_{31}u_{12}}{u_{22}}$ =- $\frac{1}{2}$

- $l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 2 \Longrightarrow u_{33} = 2 - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$=4
- D’où on a
- $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- 2) En déduire le déterminant de la matrice A
  - $\det A = \det(LU) = \det L \times \det U$
- Et comme L et U sont deux matrices triangulaires, alors
  - $\det L = 1 \times 1 \times 1 = 1; \det U = 4 \times \frac{1}{2} \times 4 = 8$
- Ce qui, donne
  - $\det \mathrm{A} = 1 \times 8 = 8$

- 3)Résoudre le système *AX=b* par la factorisation *L U* où
- $b = (-47 \ \ -12 \ \ 18)^t$
- On a
  - *AX=b* $\Leftrightarrow LU\ X = b$
- Et en posant $Y = UX$, on aura à résoudre
  - $\begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases}$

- On résout en premier $LY = b$ qui est
    - $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \frac{1}{2} y_1 + y_2 \\ \frac{-1}{4} y_1 - \frac{1}{2} y_2 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix}$$
- Et qui pour solution
    - y_1=-47;
    - $y_2 = -12 - \frac{1}{2} y_1 = \frac{23}{2}$;
    - y_3=18+$\frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{4} y_1$=12, donc Y= $\begin{pmatrix} -47 \\ \frac{23}{2} \\ 12 \end{pmatrix}$

- Enfin, on résout $UX = Y$
  - $\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47 \\ \frac{23}{2} \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 \\ \frac{1}{2}x_2 + 3x_3 \\ 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47 \\ \frac{23}{2} \\ 12 \end{pmatrix}$
- Dont la solution est
  - $x_3 = 3$; $x_2 = 2(\frac{23}{2}$-3x_3)=5 ; x_1= $\frac{1}{4}$($-47 + 9$ x_2-2 x_3)=-2
- D'où la solution cherchée est
  - $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

EXERCICE 3 :

- On considère la matrice tridiagonale suivante :

- $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) En déduire que *A* admet une décomposition de Cholesky $A = L\,L^t$.
2) Résoudre le système *AX=b* par la méthode de Cholesky où $b = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 5)^t$
3) En déduire le déterminant de la matrice *A*.

- 1) Pour que A admet une décomposition de Cholesky, il suffit de vérifier qu'elle est symétrique définie positive. En effet on a
- a) A est symétrique car
- $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$=A

- b) A est positive car
  - $X^t AX = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=$
  - $(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4)\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 \\ -x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}=$

- $X^tAX = \; x_1(2x_1 - x_2)$+ $x_2\,(-x_1 + 2x_2 - x_3)$+ $x_3\;\,(-x_2 + 2x_3 - x_4)$+
- $x_4(-x_3 + 2x_4) = 2(x_1^2 + x_2^2$+ x_3^2+ $x_4^2) \geq 0$
    - $\Leftrightarrow X^tAX \geq 0\ \forall X \in \mathbb{R}^4$
- c) A est définie
    - $X^tAX = 0 \Leftrightarrow 2(x_1^2 + x_2^2$+ x_3^2+ $x_4^2) = 0 \Leftrightarrow x_1^2$= x_2^2= x_3^2= x_4^2=0
    - $\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- 2) Résoudre le système *AX=b* par la méthode de Cholesky où
- $b = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 5)^t$
- a) Ecrivant la matrice A comme
  - $A = L\,L^t$
- $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}^t$$

- $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} {l_{11}}^2 & l_{11} l_{21} & l_{11} l_{31} & l_{11} l_{41} \\ l_{21} l_{11} & {l_{21}}^2 + {l_{22}}^2 & l_{21} l_{31} + l_{22} l_{32} & l_{21} l_{41} + l_{22} l_{42} \\ l_{31} l_{11} & l_{31} l_{21} + l_{32} l_{22} & {l_{31}}^2 + {l_{32}}^2 + {l_{33}}^2 & l_{31} l_{41} + l_{32} l_{42} + l_{33} l_{43} \\ l_{41} l_{11} & l_{41} l_{21} + l_{42} l_{22} & l_{41} l_{31} + l_{42} l_{32} + l_{43} l_{33} & {l_{41}}^2 + {l_{42}}^2 + {l_{43}}^2 + {l_{44}}^2 \end{pmatrix}$$

- En identifiant, on obtient
  - $l_{11} = \sqrt{2}; \quad l_{21} = \frac{-1}{\sqrt{2}}; l_{31} = 0; l_{41} = 0$
  - $l_{22} = \sqrt{2 - {l_{21}}^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}; \ \ l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = -1 \Longrightarrow l_{32} = -\sqrt{\frac{2}{3}};$
  - $l_{21}l_{41} + l_{22}l_{42} = 0 \Longrightarrow l_{42} = 0;$
  - ${l_{31}}^2 + {l_{32}}^2 + {l_{33}}^2 = 2 \Longrightarrow l_{33} = \frac{2}{\sqrt{3}};$
  - $l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32} + l_{43}l_{33} = -1 \Longrightarrow l_{43} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

- ${l_{41}}^2 + {l_{42}}^2 + {l_{43}}^2 + {l_{44}}^2$=2 $\Longrightarrow l_{44}$= $\frac{\sqrt{5}}{2}$:
- D’où on a
  - L= $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$; $L^t = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

- b) La résolution du système $AX = b$ revient alors à la résolution des deux systèmes 1) $LY = b$; 2) $L^t X = Y$
- Donc, résolvant en premier $LY = b$ i.e
- $$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} y_1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} y_1 + \sqrt{\frac{3}{2}} y_2 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} y_2 + \frac{2}{\sqrt{3}} y_3 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} y_3 + \frac{\sqrt{5}}{2} y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Dont la solution est
  - y_1=0;
  - $\frac{-1}{\sqrt{2}}\, y_1+\sqrt{\frac{3}{2}}\, y_2 = 0 \Longrightarrow y_2$=0;
  - $-\sqrt{\frac{2}{3}}\, y_2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\, y_3 = 0 \Longrightarrow y_3$=0;
  - $\frac{-\sqrt{3}}{2}\, y_3+\frac{\sqrt{5}}{2}\, y_4 = 5 \Longrightarrow y_4$=2 $\sqrt{5}$

- Résolvant ensuite le système $L^t X = Y$

- $$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \\ \sqrt{\frac{3}{2}}x_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}x_3 \\ \frac{2}{\sqrt{3}}x_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_4 \\ \frac{\sqrt{5}}{2}x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

- Et qui a pour solution
  - $\frac{\sqrt{5}}{2}x_4$= $2\sqrt{5} \Longrightarrow x_4$=4;
  - $\frac{2}{\sqrt{3}}x_3$- $\frac{\sqrt{3}}{2}x_4 = 0 \Longrightarrow x_3$=3;
  - $\sqrt{\frac{3}{2}}x_2$+ $\frac{-\sqrt{3}}{2}x_3 = 0 \Longrightarrow x_2$=2;
  - $\sqrt{2}x_1$+ $\frac{-1}{\sqrt{2}}x_2 = 0 \Longrightarrow x_1$=1

- On a la solution de notre système est
  - $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
- 3)En déduire le déterminant de la matrice A
  - $\det A = \det L\, L^t = \det L \times \det L^t$
- Et comme $\det L^t$= $\det L$, on a alors
  - $\det A = (\det L)^2 = (\sqrt{2}.\ \sqrt{\frac{3}{2}}.\ \frac{2}{\sqrt{3}}.\ \frac{\sqrt{5}}{2})^2$=5