1

I. PRINCIPE D'UNE BASE

La base est le nombre qui sert à définir un système de numération.

- La base du système décimal est dix "10"
- La base du binaire est deux "2"
- Celle du système octal est huit "8"
- La base de l'hexadécimal est seize "16"

Quelque soit la base numérique employée, elle suit la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^{i=n}(b_i a^i) = b_i a^n + ... + b_5 a^5 + b_4 a^4 + b_3 a^3 + b_2 a^2 + b_1 a^1 + b_0 a^0$$

ou : b_i : chiffre de la base de rang i

et : a^i : puissance de la base a d'exposant de rang i

b_0 est appelé le chiffre de poids faible, et b_i le chiffre de poids fort

La notation $(\ )_b$ indique que le nombre est écrit en base b

Exemple : base 10

$1986 = (1 \times 10^3) + (9 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (6 \times 10^0)$

I.1 LE SYSTEME DECIMAL

Le système décimal est celui dans lequel nous avons le plus l'habitude d'écrire et utiliser.

Chaque chiffre peut avoir 10 valeurs différentes :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de ce fait, le système décimal a pour base 10.

Tout nombre écrit dans le système décimal vérifie la relation suivante :

$745 = 7 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$

$745 = 7 \times 10 \times 10 + 4 \times 10 + 5 \times 1$

$745 = 7 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

Chaque chiffre du nombre est à multiplier par une puissance de 10 : c'est ce que l'on nomme le poids du chiffre.

L'exposant de cette puissance est nul pour le chiffre situé le plus à droite et s'accroît d'une unité pour chaque passage à un chiffre vers la gauche.

$12435 = 1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$.

Cette façon d'écrire les nombres est appelée système de numération de position.
Dans notre système conventionnel, nous utilisons les puissances de 10 pour pondérer la valeur des chiffres selon leur position, cependant il est possible d'imaginer d'autres systèmes de nombres ayant comme base un nombre entier différent.

I.2 LE SYSTEME BINAIRE

C'est un système de numération utilisant la base 2. On nomme couramment bit (de l'anglais binary digit, soit « chiffre binaire ») les chiffres de la numération binaire positionnelle. Ceux-ci ne peuvent prendre que deux valeurs (le 0 et le 1).

I.3 LE SYSTEME OCTAL

Le système de numération **octal** est le système de numération de base 8, et utilise les chiffres de 0 à 7.

Ainsi, un nombre exprimé en base 8 pourra se présenter de la manière suivante : $(745)_8$ Lorsque l'on écrit un nombre, il faudra bien préciser la base dans laquelle on l'exprime pour lever les éventuelles indéterminations (745 existe aussi en base 10). $(745)_8$: Ainsi le nombre sera mis entre parenthèses (745 dans notre exemple) et indicé d'un nombre représentant sa base (8 est mis en indice)

I.4 LE SYSTEME HEXADECIMALE

C'est un système de numération positionnel en base 16. Il utilise ainsi 16 symboles, les dix premiers chiffres (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) et les lettres *A* à *F* pour les six suivants :

10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**

La correspondance entre base 2, base 10 et base 16 est indiquée dans le tableau ci-après :

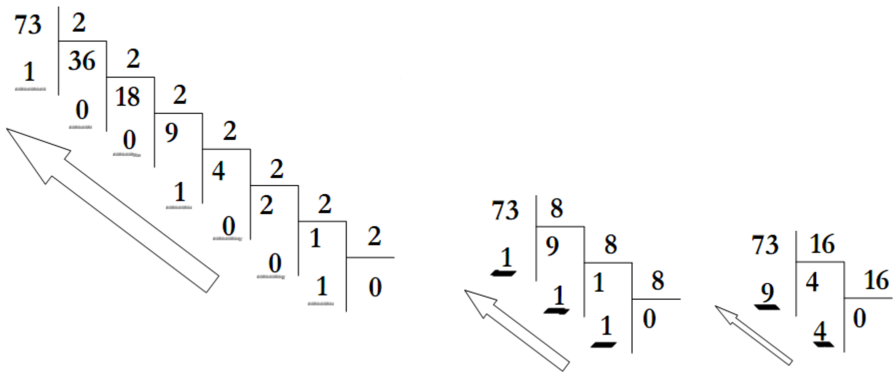
Base 10	Base 16	Base 2
0	0	0
1	1	1
2	2	10
3	3	11
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

II. CONVERSION DU DECIMAL VERS UNE BASE B

La règle à suivre est les divisions successives :

- On divise le nombre par la base b
- Puis le quotient par la base b
- Ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'un quotient nul ou inférieur à la base
- La suite des restes correspond aux symboles de la base visée.
- On obtient en premier le chiffre de poids faible et en dernier le chiffre de poids fort

Exemple



$(73)_{10}= (1001001)_2= (111)_8=(49)_{16}$

- **Conversion d'une base b à la base décimale**

Soit N un nombre représenté en binaire par : N = (1010011101)₂

$N=(1*2^9) + (0*2^8) + (1*2^7) + (0*2^6) + (0*2^5) + (1*2^4) + (1*2^3) + (1*2^2) + (0*2^1) + (1*2^0)$

$= 512 + 0 + 128 + 0 + 0 + 16 + 8 + 4 + 0 + 1= (669)_{10}$

Soit N un nombre représenté en octale par : N = $(251)_8$

$N = (2*8^2) + (5*8^1) + (1*8^0) = 128 + 40 + 1 = (169)_8$

Soit N un nombre représenté en hexadécimale par : N = $(1C9)_{16}$

$N= (1*16^2) + (C*16^1) + (9*16^0) = (1*16^2) + (12*16^1) + (9*16^0) = 256 + 192 + 9 = (457)_{10}$

III. CODAGE DES NOMBRES FRACTIONNAIRES

Codage d'un nombre fractionnaire positif en base B:

$(N)_B = a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1\, a_0$

Pour coder un nombre fractionnaire positif, on rajoute une partie fractionnaire après une virgule

$(N)_B = a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1\, a_0\, ,\, b_1\, b_2 \ldots b_{m-1}\, b_m$

La valeur en décimal d'un tel nombre est donnée par le calcul de

$a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \ldots\, a_1 B^n + a_0 + b_1 B^{-1} + b_2 B^{-2} + \ldots + b_{m-1} B^{m+1} + b_m B^{-m}$

Exemple

- $123{,}45 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$
- $(101{,}101)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1}$
  $+ 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$
  $= 4 + 1 + 0{,}5 + 0{,}125 = 5{,}625$

III.1 Conversion d'un nombre décimal réel en base B

Pour la partie entière

- Utiliser la méthode de la division entière comme pour les entiers

Pour la partie fractionnaire

- Multiplier la partie fractionnaire par B
- Noter la partie entière obtenue
- Recommencer cette opération avec la partie fractionnaire du résultat et ainsi de suite
- Arrêter quand la partie fractionnaire est nulle

- Ou quand la précision souhaitée est atteinte
- Car on ne peut pas toujours obtenir une conversion en un nombre fini de chiffres pour la partie fractionnaire

➢ La partie fractionnaire dans la base B est la concaténation des parties entières obtenues dans l'ordre de leur calcul

Exemple: Conversion de 12.6875 en binaire

- Conversion de 12 : donne $(1100)_2$
- Conversion de 0,6875
  - 0,6875 x 2 = 1,375 = $\underline{1}$ + 0,375
    0,375 x 2 = 0,75 = $\underline{0}$ + 0,75
    0,75 x 2 = 1,5 = $\underline{1}$ + 0,5
    0,5 x 2 = 1 = $\underline{1}$ + 0
  - $(12{,}6875)_{10} = (1100{,}1011)_2$

IV CONVERSION ENTRE BASES

En informatique les bases binaire, octale et hexadécimale sont fréquemment utilisées, toutes ces bases étant des puissances de deux, 2^1, 2^3, 2^4

Il y a des conversions particulièrement simples.

➢ ***Conversion Octal – Binaire***

Pour convertir un nombre de l'octal vers le binaire il suffit de remplacer chaque chiffre constituant le nombre octal par son équivalent en binaire sur 3 bits

Exemple

$(742)_8$ = $(111\ 100\ 010)_2$

$(1\ 6\ 7\ 3)_8$ = $(001\ 110\ 111\ 011)_2$ = $(1\ 110\ 111\ 011)_2$

➢ *Conversion Hexadécimale – Binaire*

Pour convertir un nombre de l'héxadéciamal vers le binaire il suffit de remplacer chaque chiffre constituant le nombre héxadécimal par son équivalent en binaire sur 4 bits

Exemple

$(A\ 9\ 2)_{16} = (\ 1010\ 1001\ 010)_2$

$(8\ B\ 7\ F)_{16} = (1000\ 1011\ 0111\ 1111)_2$

➢ *Conversion binaire - Octal*

Pour convertir un nombre binaire en Octal, il suffit de faire des groupes de trois bits (en commençant depuis la droite).

Exemple

Binaire	1110010	11001100100	111100110010101011100101
Regroupement	**00**1/110/010	**0**11/001/100/100	111/100/110/010/101/011/100/101
Pseudo Octal	1 / 6 / 2	3 / 1 / 4 /4	6 / 4 / 6 /2/ 3 / 4 /5
Octal	162	3144	7462345

➢ *Conversion hexadécimal - binaire*

Pour convertir un nombre binaire en hexadécimal, il suffit de faire des groupes de quatre bits (en commençant depuis la droite).

Exemple

Binaire	110010	101001100100	110110110110101011100101
Regroupement	**00**11 / 0010	1010/0110/0100	/1101/1011/0110/1010/1110/0101
Pseudo hexadécimale	3 / 2	10 /6 /4	13/11/6/10/14/5
Hexadécimale	32	A64	DB6AE5

IV.LES OPERATIONS ARITHMETIQUES DANS UNE BASE B

- Les opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division) s'effectuent en base quelconque B avec les mêmes règles qu'en base 10.
- Une retenue ou un report apparaît lorsque l'on atteint ou on dépasse la valeur B de la base.

Les opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division) sont réalisables dans toute base B.

- Avec mêmes règles que pour la base décimale
- Retenues également mais dépendant de la base
- Quand on additionne 2 chiffres a et b dans la base B si la somme des valeurs décimales de a et b dépassent ou égale B alors il y a une retenue

1 L'ADDITION

1.1 L'addition Binaire

- L'addition de deux nombres binaires est parfaitement analogue à l'addition de deux nombres décimaux.
- En fait, l'addition binaire est plus simple puisqu'il y a moins de cas à apprendre.
- On commence par additionner les chiffres du rang de poids faible, les chiffres du deuxième rang sont ensuite additionnés, et ainsi de suite. Les mêmes règles s'appliquent à l'addition binaire.

- Cependant, on verra quatre cas, qui peuvent survenir lorsqu'on additionne deux chiffres binaires et cela quel que soit le rang. Ces quatre cas sont:

  0 + 0 = 0

  1 + 0 = 1

  1 + 1 = 10 = 0 + report de 1 sur le rang de gauche

  1 + 1 + 1 = 11 = 1 + report de 1 sur le rang de gauche

Exemple :

	1	**1**			
		0	**1**	**1**	**0**
+		**1**	**1**	**0**	**1**
=	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**

0110+1101 =10011

1.2 L'addition dans une Base quelconque X (X=4, 8, 16, 3, …)

- L'addition dans n'importe quelle base X, est analogue à l'addition décimale.
- Si la somme deux chiffres situés dans une colonne dans la base X, est égale ou dépasse la base X, on enlève la valeur de la base (on soustrait X) à cette somme.
- On met le reste de le résultat, et on retient 1 dans la colonne suivante.

Exemple : $(2572)_8 + (310)_8 = (?)_8$

	1	**1**		
	2	**5**	**7**	**2**
+		**4**	**1**	**0**
=	**3**	**2**	**0**	**2**

7+1=8 ; 8-8=0 , on met **0** et on retient 1
5+4=9+1=10 ; 10-8=2, on met **2** et on retient 1

- On applique le même principe quelque soit la base.

2- LA SOUSTRACTION

2.1 La soustraction Binaire

- La soustraction d'un nombre binaire (le diminuteur) d'un autre nombre (le diminuande) est semblable à la soustraction décimale et fait intervenir un emprunt de 1 (réellement, on empreinte la valeur 2, càd la base), dans le cas où un bit du diminuteur est supérieur à celui de même rang du diminuande.

- Cet emprunt sera ajouté au bit du rang suivant du diminuteur en tant que 1.

Exemple

		1	1	1
	1	**1**	**0**	**0**
-	$_1$	$_1$**1**	$_1$**1**	**1**
=	**0**	**1**	**0**	**1**

1100 - 111 = 101

2.2 La soustraction Dans une base quelconque X (X=3, 4, 8, 16, …)

- La soustraction d'un nombre (le diminuteur) d'un autre nombre (le diminuande) est semblable à la soustraction décimale et fait intervenir un emprunt de 1 (réellement, on empreinte la valeur X, c'est-à-dire la base elle mée) dans le cas où un bit du diminuteur est supérieur à celui de même rang du diminuande.

- Cet emprunt sera ajouté ou rendu au bit du rang suivant du diminuteur en tant que 1.

Exemple : $(2572)_8 - (610)_8 = (?)_8$

		1		
	2	5	7	2
-	$_1$	6	1	0
=	1	7	6	2

- **5-6, on ne peut le faire ;**
- **On fat un empreint de 1, on a empreinte la base, donc 8**
  5+8= 13 ; 13-6= 7 ;
- **On rend le 1 dù à la colonne suivante.**

3. LA MULTIPLICATION

3-1 La multiplication Binaire

- On multiplie les nombres binaires de la même façon qu'on multiplie les nombres décimaux.
- Le processus est plus simple car les chiffres du multiplicateur sont toujours 0 ou 1, de sorte qu'on multiplie toujours par 0 ou par 1.
- La multiplication binaire se base sur les quatre opérations suivantes:
  - 1 x 1 = 1
  - 1 x 0 = 0
  - 0 x 1 = 0
  - 0 x 0 = 0

Exemple

				1	**1**	**0**	**1**
			*	**1**	**0**	**1**	**1**
				1	**1**	**0**	**1**
			^{1}**1**	**1**	**0**	**1**	.
		^{1}**0**	**0**	**0**	**0**	.	.
^{1}	^{1}**1**	**1**	**0**	**1**	.	.	.
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

3.2 La Multiplication dans une base quelconque X (X=3,4,8,16,…)

- On multiplie les nombres dans une base X quelconque de la même façon qu'on multiplie les nombres décimaux.
- Lorsque la multiplication de deux chiffres égale ou dépasse la base X, on convertir le résultat vers la base dans laquelle on travaille

Exemple : $(2103)_8 \times (307)_8 = (?)_8$

					1	
		1			2	
			2	1	0	3
*				3	0	7
		$^{1}1$	$^{1}6$	7	2	5
+		0	0	0	0	.
+	6	3	1	1	.	.
=	6	5	0	0	2	5

3*7=21 =(2*8)+ 5	2*7=14 = (1*8) + 6
3*3=9 =(1*8)+ 1	
7+1=8 -8= 0, retenu 1	6+1+1 =8-8= 0, retenu 1

4 La Division

- Le principe de la division binaire est semblable à celui de la division décimal, mais en plus simple du fait que chaque quotient partiel est soit égal à 1 (division possible) ou à 0 (division impossible.
- La division est l'opération inverse de la multiplication, dans le sens où on soustrait de façon répétitive un nombre à un autre jusqu'à ce que cela ne soit plus possible, avec à chaque fois un décalage à droite.
- La première étape consiste à soustraire, en partant de la gauche, le diviseur au dividende. Si la soustraction n'est pas possible, le diviseur est décalé d'une position vers la droite, puis la soustraction est effectuée.
- La soustraction suivante a lieu entre le résultat de la soustraction précédente, augmenté à droite bit suivant du dividende selon la règle énoncée précédemment
- Cette étape est répétée jusqu'à épuisement des bits du dividende. A chaque soustraction, on inscrit 1 au résultat, dans le cas contraire, on met 0.

Exemple:

```
    1 1 1 0 0 1 1 1        |      1 0 1
 -  1 0 1                  |-----------------
    -------                |
    0 1 0 0 0              |   1 0 1 1 1 0
  -    1 0 1               |
      --------             |
      0 0 1 1 1            |
  -      1 0 1             |
        ---------          |
         0 1 0 1           |
   -        1 0 1          |
          ----------       |
            0 0 0 1        |
  -           0 0 0        |
            ----------     |
               0 0 1       |
```

111100111 : 101 = 101110   reste 1.