Corrigé de l'EMD. MN.

Exo 1 (6pts)

Calculons l'inverse de A par la méthode de Gauss-Jordan : $(A|I) \sim (I|A^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad (1)$$

$$\overset{L_2 \leftarrow \frac{L_2}{5}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) (0.5) \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{5} & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -\frac{13}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{array}\right) \quad (1)$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \frac{1 L_3}{-7}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & +\frac{13}{35} & -\frac{1}{35} & -\frac{1}{7} \end{array}\right) (0.5) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{9}{35} & \frac{2}{35} & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 & -8/35 & 6/35 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 13/35 & -1/35 & -1/7 \end{array}\right) \quad (1)$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/35 & 8/35 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 & -8/35 & 6/35 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 13/35 & -1/35 & -1/7 \end{array}\right) \quad (1)$$

D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/35 & 8/35 & 1/7 \\ -8/35 & 6/35 & -1/7 \\ 13/35 & -1/35 & -1/7 \end{pmatrix} \quad (1)$$

① A est inversible $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$ (1)

Calculons $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha & 4 & 1 \\ \alpha & -2 & -1 \\ 2 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha(-4+3) - 4(2\alpha+2) + (3\alpha+4) \quad (1)$$

$$= -5\alpha - 6.$$

$\Rightarrow \det A \neq 0 \Longleftrightarrow -5\alpha - 6 \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq -\frac{6}{5}$

donc A est inversible $\Longleftrightarrow \alpha \neq -\frac{6}{5}$. (1)

② Une condition suffisante pour que les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent est que la matrice B soit à diagonale strictement dominante (1)

i.e :

La 1ère ligne de B : $|\beta| > 0 + 1 \Rightarrow |\beta| > 1$ (0,5)

La 2ème " " $|\beta| > 0 + 0 \Rightarrow |\beta| > 0$ (0,5)

La 3ème " " $|\beta| > 1 + 0 \Rightarrow |\beta| > 1$ (0,5)

Donc il suffit que B vérifie la cdt $|\beta > 1$.

(0,5)

(Exo) :

$$\begin{cases} x_1 - \frac{x_2}{4} = 1 \\ -\frac{x_1}{4} + x_2 - \frac{x_3}{4} = 1 \\ -\frac{x_2}{4} + x_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 0,5

D'où : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 0,5 ; $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ 0,5 ; $U = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 0,5

$\Rightarrow$ les itérations de Jacobi :

$D X^{(k+1)} = (L+U) X^{(k)} + b$ 0,5

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4} x_2^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4} x_1^{(k)} + \frac{1}{4} x_3^{(k)} + 1 \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4} x_2^{(k)} + 1 \end{cases}$$ 1 ; $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1ère itération $\Rightarrow k=0 \Rightarrow$ $x_1^{(1)} = 1$, $x_2^{(1)} = 1$, $x_3^{(1)} = 1$ $\Rightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 0,75

2e itération : $k=1 \Rightarrow$ $x_1^{(2)} = \frac{1}{4} x_2^{(1)} + 1 = 5/4$

$x_2^{(2)} = \frac{1}{4} x_1^{(1)} + \frac{1}{4} x_3^{(1)} + 1 = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1/2 \\ 5/4 \end{pmatrix}$

$x_3^{(2)} = \frac{1}{4} x_2^{(1)} + 1 = \frac{5}{4}$ 0,75

② La Matrice de Jacobi :

$$J = D^{-1}(L+U) \quad 0{,}5$$

on $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 0{,}5$

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \quad 0{,}5$$

$$\Rightarrow |J| = \max\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = 1/2 < 1 \quad 1$$

d'où $|J| < 1 \Rightarrow$ La methode est convergente

0,5