Table des matières

Résumé Ce document rédigé pour les étudiants de première année mathématiques et informatiques, c'est un support du module algèbre du deuxième semestre. Ce module contient quatre chapitres, espace vectoriel, applications linéaires, les matrices et résolution de systèmes d'équations. Le cours est diviser en plusieurs parties, dont le deuxième chapitre sur les applications linéaires est présenté ci-dessous.

Chapitre 2

Notion d'Application Linéaire

Définition 1. 1. *Soit* $(E,+,\cdot)$ *et* $(F,+,\cdot)$ *deux* $\mathbb{K}$. *espaces vectoriels et soit* f *une application de* E *dans* F, *on dit que* f *est une application lineaire si et seulement si :*

$$\begin{cases} \forall x, y \in E, f(x+y) = f(x) + f(y); \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x). \end{cases}$$

ou d'une manière équivalente :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

2. *Si de plus* f *est bijective, on dit alors que* f *est un isomorphisme de* E *dans* F.
3. *Une application lineaire de* $(E,+,\cdot)$ *dans* $(E,+,\cdot)$ *est dite un endomorphisme.*
4. *Un isomorphisme de* $(E,+,\cdot)$ *dans* $(E,+,\cdot)$ *est aussi appelé un automorphisme de* E *dans* E.

Exemple 1. 1. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x, -y) \end{array}$$

est lineaire, en effet pour $u = (x,y), v = (x',y') \in \mathbb{R}^2$, *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} f_1(\lambda u + \mu v) & = & f_1(\lambda(x,y) + \mu(x',y')) \\ & = & f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ & = & (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', 2(\lambda x + \mu x'), -(\lambda y + \mu y')) \\ & = & \lambda(x+y, 2x, -y) + \mu(x'+y', 2x', -y') \\ & = & \lambda f_1(x,y) + \mu f_1(x',y') \\ & = & \lambda f_1(u) + \mu f_1(v) \end{array}$$

2. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} f_2 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

est une application lineaire, car :$\forall u = (x, y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} f_2(\lambda u + \mu v) &= f_1(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) \\ &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= \lambda x + \mu x' - (\lambda y + \mu y') \\ &= \lambda(x - y) + \mu(x - y') \\ &= \lambda f_2(x, y) + \mu f_2(x', y') \\ &= \lambda f_2(u) + \mu f_2(v) \end{aligned}$$

3. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} f_3 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x \end{array}$$

est un isomorphisme, en effet,f_3 *est lineaire car :*

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, f_3(\lambda x + \mu y) = 3(\lambda x + \mu y) = 3\lambda x + 3\mu y = \lambda f_3(x) + \mu f_3(y),$

et f_3 *est bijective.*

Remarque 1. *On peut montrer facilement la somme de deux applications linéaires est une application linéaire, aussi le produit d'une application linéaire par un scalaire et la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

Proposition 1. *Soit* f *une application linéaire de* E *dans* F.

1. $f(O_E) = O_F$,
2. $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$.

Démonstration. On a,

1. $f(O_E) = f(O_E + O_E) = f(O_E) + f(O_E) \Longrightarrow f(O_E) = O_F$.
2. $f(-x) + f(x) = f(-x + x) = f(O_E) = O_F \Longrightarrow f(-x) = -f(x)$.

□

2.1 Noyau et Image

Définition 2. *Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire, On appelle noyau de* f *l'ensemble noté* $ker f$ *défini par*

$$ker f = \{u \in E; f(u) = 0_F\}$$

On note parfois $ker f$, *par* $f^{-1}(0)$.

DÉFINITION 3. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, On appelle image de f l'ensemble noté Imf défini par*

$$Imf = \{y \in F/\exists x \in E, f(x) = y\} = \{f(x)/x \in E\} = f(E)$$

EXEMPLE 2. 1. *Déterminons le noyau de l'application f_1,*

$$\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+2y \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} kerf & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/f(x,y) = 0\} \\ & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x+2y = 0\} \\ & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x = -2y\} \\ & = & \{(-2y,y)/y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y(-2,1)/y \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

donc le $kerf$ est un sous espace vectoriel engendré par $u = (-2,1)$ donc il est de dimension 1, et sa base est $\{u\}$.

2. *Cherchons l'image de*

$$\begin{array}{rcl} f_2 : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-x+y, x-z, y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} Imf_2 & = & \{f(x,y,z)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \{(-x+y, x-z, y)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ & = & \{x(-1,1,0) + y(1,0,1) + z(0,-1,0)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \end{array}$$

donc Imf_2 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{(-1,1,0),(1,0,1),(0,-1,0)\}$ il est facile de montrer que cette famille est libre et donc il forment une base de $\mathbb{R}^3$ donc $dimImf_2 = 3, rg(f_2) = 3$, et d'où $Imf = \mathbb{R}^3$.

2.2 Propriétés

THÉORÈME 1. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors*

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow kerf = 0_E$$

$$f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow Imf = F$$

EXEMPLE 3. *Dans l'exemple pécédant $Imf_2 = \mathbb{R}^3$ donc f_2 est surjective, montrons que f_2 est injective*

$$kerf_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/f_2(x,y,z) = (0,0,0)\},$$

$$\Longrightarrow ker f_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (-x+y, x-z, y) = (0,0,0)\}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ x-z=0 \\ y=0 \end{cases} \Longrightarrow x=y=z=0$$

donc $ker f_2 = (0,0,0)$, *ainsi* f_2 *est bijective.*

PROPOSITION 2. *Si f est une application linéaire de E dans F,alors si $dim Im f = n < +\infty$, alors n est appelé rang de f et on note $rg(f)$.*

THÉORÈME 2. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, avec $dim E = n$ (finie) alors*

$$dim ker f + dim Im f = dim E$$

PROPOSITION 3. *Si f est une application linéaire de E dans F,alors si $dim Im f = n < +\infty$, alors n est appelé rang de f et on note $rg(f)$.*

PROPOSITION 4. *Soit $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire, alors $ker f$ est un s.e.v. de E, et $Im f$ est un s.e.v. de F.*

1 Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Image d'une famille génératrice

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espace vectoriels et f une application linéaire de E dans F, si B est une famille génératrice de E alors l'image par f de la famille B est génératrice du sous espace vectoriel $Im f$ de F, en d'autre termes

$$E = Vect(B) \Longrightarrow Im f = Vect(f(B))$$

Image d'une famille libre

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espace vectoriels et f une application linéaire de E dans F, B une famille libre de E . Si f est injective alors $f(B)$ est une famille libre de F.

Image d'une base

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espace vectoriels et f une application linéaire de E dans F, B une base de E. L'application f est bijective si et seulement si $f(B)$ est une base de F

THÉORÈME 3. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espace vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Si $dim E = dim F$ alors on a les équivalences suivntes*

$$f \ bijective \Longleftrightarrow f \ injective \Longleftrightarrow f \ surjective$$

Propiétés

PROPOSITION 5. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espace vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Pour tous vecteurs $v_1, v_2..., v_k$ de E pour tous scalaires $\alpha_1, \alpha_2..., \alpha_k$ de $\mathbb{K}$ on a :*

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + ... + \alpha_k f(v_k)$$

on en déduit le résultat suivant

COROLLAIRE 1. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espace vectoriels et f une application linéaire de E dans F, on suppose que E de dimension finie et on désigne par $B = (e_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de E, pour tout vecteur x appartenant à E,*

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + ... + x_p f(e_{p)}$$

où $x_1, x_2, ..., x_p$ appartenant à $\mathbb{K}$ sont les coordonées de x dans la base B

Démonstration. Soit x un vecteur de E se décomposent dans la base $B = (e_i)_{1\leq i\leq p}$ sous la forme

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_p e_p$$

En appliquant f on obtient

$$f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_p e_p) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + ... + x_p f(e_p)$$

où on a utilisé le résultat de la proposition précédante □

2 Détermination d'une application linéaire par son action sur une base

une conséquence du corollaire 1 est qu'une application linéaire est entiérement determinée par les images des vecteurs d'une base. Pour se convaincre, considérons deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels E et F, avec E de dimension finie muni d'une base $B = (e_i)_{1\leq i\leq p}$ et deux applications linéaires f et g de E dans F telles que

$$\forall i \in \{1, ..., p\}, f(e_i) = f(e_j)$$

Montrons que f et$g$ sont alors identiques, c'est à dire montrons que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$ Soit x un vecteur de E de coordonées $x_1, x_2, ..., x_p$ dans B d'après le corollaire 1

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + ... + x_p f(e_p)$$

$$g(x) = x_1 g(e_1) + x_2 g(e_2) + ... + x_p g(e_p)$$

On en déduit alors que

$$f(x) = g(x)$$

Autrement dit, si deux applications linéaires agissent de la même manière sur les vecteurs d'une base alors elles sont necessairement identiques. Il est clair que la réciproque est vraie, on a doc l'équivalence.

2.3 Matrice associée à une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels donnés, tels que $dimE = p$ et $dimF = k$, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ une base de E, et $B_2 = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$ une base de F, avec

$$f(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + ... + a_{ki}w_k$$

alors on appelle matrice associée à f par rapport aux bases B_1 et B_2 notée $M(f, B_1, B_2)$ la matrice (k, p) dont les colonnes sont les coefficient aij

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kp} \end{pmatrix}$$

Exemple 4.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, x - y) \end{array}$$

$\mathbb{R}^3$ sa base canonique $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ et $\mathbb{R}^2$ sa base canonique $B' = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)\}$,

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1) = v_1 + v_2$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, -1) = v_1 - v_2.$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (1, 0) = v_1$$

$$\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & \\ 1 & 1 & 1 & v_1 \\ 1 & -1 & 0 & v_2 \end{pmatrix}$$

Exemple 5.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y) \end{array}$$

$B = \{e_1 = (1, 2), e_2 = (-1, 1)\}$ et $B' = \{v_1 = (0, 2), v2 = (-2, 1)\}$, On doit chercher les $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

$$f(e_1) = f(1, 2) = (3, -1) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$

$$f(e_2) = f(-1, 1) = (0, -2) = \lambda_3 v_1 + \lambda_4 v_2,$$

$$(3, -1) = \lambda_1(0, 2) + \lambda_2(-2, 1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4} \\ \lambda_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(0,-2) = \lambda_3(0,2) + \lambda_4(-2,1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -1 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \frac{1}{4} & -1 & v_1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & v_2 \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 6. *Soit l'application linéaire*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x+y, x+y) \end{array}$$

pour trouver la matrice associée à f par rapport aux bases $B_1 = \{(1,1),(-2,0)\}$ et $B_2 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, on procède comme suit

$$f(1,1) = (3,3,3) = 3(1,1,1) + 0(1,1,0) + 0(1,0,0)$$

$$f(-2,0) = (-2,-2,-2) = -2(1,1,1) + 0(1,1,0) + 0(1,0,0)$$

les coefficient obtenus constituent les colonne de $M(f,B_1,B_2)$ et donc

$$M(f,B_1,B_2) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 6. *Soient E et F deux $\mathbb{K}-$ espace vectoriels de dimensions finies n et$m$,$B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et $B' = (v_1, v_2, ..., v_m)$ une base de F, alors la donnée d'une matrice $A \in M(n,m)(\mathbb{K})$ donne une unique application linéaire f de E dans F la matrice suivant les bases, B et B' est A*

EXEMPLE 7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, *$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, A est la matrice de f suivant la base canonique de $\mathbb{R}^2$, (e_1, e_2),*

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 \Longrightarrow f(1,0) = (1,0) + 2(0,1) = (1,2),$$

$$f(e_2) = -e_1)f(0,1) = -(1,0) = (-1,0),$$

$$f(x,y) = f(x(1,0) + y(0,1)) = xf(1,0) + yf(0,1)$$

$$f(x,y) = x(1,2) + y(-1,0) = (x-y, 2x).$$