Chapitre 3

Les matrices

3.1 Espace vectoriel des matrices

Définition 1. *On appelle une matrice dans $\mathbb{K}$ de type (n, p) un tableau rectangulaire A d'éléments de $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note a_{ij} l'élément qui se trouve à la ligne numéro i et la colonne j et on note la matrice A par $A = (a_{ij})1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$. L'ensemble des matrices de type (n, p) est noté $M(n, p)(\mathbb{K})$.

1. Pour $n = 1$, on dit que A est une matrice ligne, $A = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1p})$.
2. Pour $p = 1$ on dit que A est une matrice ligne, $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix}$
3. Pour $n = p$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n et on note $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Exemple 1. *1.* $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, *$A_1$ est une matrice de type $(4, 3)$.*

2. $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *A_2 est une matrice de type $(2, 4)$.*

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, *A_3 est une matrice carrée d'ordre 2.*

DÉFINITION 2. *Soit* $A = (a_{ij})1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ *et* $B = (b_{ij})1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ *deux matrices de types* (n,p)*,*

On dit que $A = B$ *si* $\forall i = 1, ..., n, \forall j = 1, ..., p, a_{ij} = b_{ij}$*.*

3.2 Opération sur les matrices

1 Addition de matrices et multiplication d'une matrice par un scalaire

— Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$. On appelle somme de deux matrices A et B, et on note $A+B$ la matrice de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ définie par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$$

— Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une matrice de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ et un élément α de $\mathbb{K}$. On appelle produit par un scalaire α , et on note $\alpha \cdot A$ ou αA la matrice de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ définie par

$$\alpha A = (\alpha \times a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$$

Alors $(\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \times p$, sachant que l'élément neutre de l'addition est la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & .. & . \\ 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix}$

2 Produit de deux matrices

DÉFINITION 3. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{(p,m)}(\mathbb{K})$*, on définit le produit de la matrice* A *par* B *comme étant une matrice* $C = (c_{ij})1 \leq i \leq, 1 \leq j \leq m \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$*, avec*

$$cij = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{31}b_{3j} + ... + a_{ip}b_{pj}$$

.

REMARQUE 1.
1. *L'élément* C_{ij} *de la matrice* C *se calcule en additionnant le produit des éléments de la ligne* i *de la matrice* A *par la les éléments de la colonne* j *de la matrice* B*.*
2. *Le produit de deux matrice ne peut se faire que si le nombre de colonnes de la matrice* A *correspond au nombre de lignes de la matrice* B*.*

EXEMPLE 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A est de type $(2,3)$ et B de type $(3,4)$ ainsi C sera de type $(2,4)$.

$$C = A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 1\times1+1\times2+0\times1 & 1\times2+1\times0+0\times1 & 1\times0+1\times1+0\times0 & 1\times1+1\times1+0\times0 \\ 2\times1+2\times2+0\times1 & 2\times2+2\times0+0\times1 & 2\times0+2\times1+0\times0 & 2\times1+2\times1+0\times0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

REMARQUE 2. *Le produit de deux matrice n'est pas commutatif voiçi un exemple :*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3 Transposition de matrices

DÉFINITION 4. *La transposée de la matrice A est une matrice notée A^t définie par*

$$A^t = (a_{ji}) 1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n,$$

autrement dit A^t c'est la matrice de type (p,n) obtenue en remplaçant les lignes par les colonnes et les colonnes par les lignes et on a : $(A^t)^t = A$.

EXEMPLE 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

DÉFINITION 5. *Soit A une matrice carrée sur $\mathbb{K}$*

1. *On dit que A est une matrice symétrique si $A^t = A$*
2. *On dit que A est une matrice antisymétrique si $A^t = -A$*

3.3 Anneau de matrices carrées

DÉFINITION 6. *Soit A une matrice carrée d'ordre n, $A = (a_{ij}) 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$,*

1. *La suite des éléments $\{a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}\}$ est appelée la diagonale principale de A.*
2. *La trace de A est le nombre $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$.*
3. *A est dite matrice diagonale si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ c'est à dire que les éléments de A sont tous nuls sauf la diagonale principale.*
4. *A est dite matice triangulaire supérieure (resp inférieure) si $a_{ij} = 0, \forall i > j$,(resp $i < j$), c'est à dire les éléments qui sont au dessous(resp au dessus) de la diagonale sont nuls).*

EXEMPLE 4. 1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *$A_1$ est une matrice diagonale.*

2. $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, *$A_2$ est une matrice triangulaire inférieure.*
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 40 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *$A_3$ est une matrice triangulaire supérieure .*

Théorème 1. *Le produit des matrices est une opération interne dans $\mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ et il admet un élément neutre la matrice nommée matrice identitée notée I_n définie par :*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ . & . & . & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 7. *Soit* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

une matrice dans $\mathcal{M}(2,2)(\mathbb{K})$, on appelle déterminant de A le nombre réel donné par : $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. On le note $det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,

Exemple 5. *Calculons le $det(A)$,*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 0 \times (2) = -1.$$

Définition 8. *De même, on définit le déterminant d'une matrice*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}),$$

par

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} a_{12} \Big| + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} a_{13}\Big| + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Exemple 6.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 0\begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow |A| = -1 + 0 - 12 = -13$$

PROPOSITION 1. *Pour calculer le déterminant d'une matrice A on peut développer A suivant n'importe quelle ligne ou colonne. Suivant cette proposition il vaut mieux choisir la ligne ou colonne contenant le plus de zéros.*

EXEMPLE 7. *On reprend la même matrice de l'exemple pécédent mais calculer suivant la troisième ligne on aura :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\cdot 0 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 12 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\iff |A| = 0 + -13 + 0 = -13$$

on calcule juste un déterminant au lieu de trois.

DÉFINITION 9. *De même, on définit le déterminant d'une matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K}),$$

par

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)_{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

DÉFINITION 10. *Soit $A = (a_{ij}) 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, le déterminant suivant la $j-$ème colone est :*

$$det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} D_{2j} + ... + (-1)^{n+j} a_{nj} D_{nj}, j = 1, ..., n.$$

Le déterminant suivant la $i-$ème ligne est :

$$det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} D_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} D_{i2} + ... + (-1)^{i+n} a_{in} D_{in}, i = 1, ..., n.$$

Où A_{ij} représent ce que nous appelons le déterminant mineur du terma a_{ij} , le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu de $det(A)$ en supprimant la $i-$ème ligne et la $j-$ème colonne.

PROPOSITION 2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :*

1. $det(A) = det(A^t)$.
2. $det(A) = 0$ *si deux lignes de A sont égales (ou deux colonnes).*

3. *$det(A) = 0$ si deux lignes de A sont proportinnelles (ou deux colonnes le sont).*
4. *$det(A) = 0$ si une ligne est combinaison linéaires de deux autres lignes de A (même chôse pour les colonnes).*
5. *$det(A)$ ne change pas si on ajoute à une ligne une combinaison linéaires d'autres lignes (même chôse pour les colonnes).*
6. *Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.*

Exemple 8. 1. *$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$, car la ligne 1 est égale à la ligne 3, $L_1 = L_3$.*

2. $|B| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -15 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$, *car* $L_1 = 3L_4$.

3. $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 0$, *car* $C_1 = C_2$.

Définition 11. *Soit $V_1, V_2, ..., V_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on appelle déterminant des vecteurs $(V_1, V_2, ..., V_n)$ et on le note $\det(V_1, V_2, ..., V_n)$ le déterminant dont les colonnes sont les vecteurs $V_1, V_2, ..., V_n$.*

Exemple 9. *Soient $V_1 = (1, 1, 0), V_2 = (0, -1, 1), V_3 = (0, 0, 1)$, alors*

$$\det(V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Proposition 3. *Soit $V_1, V_2, ..., V_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. $(V_1, V_2, ..., V_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, $\det(V_1, V_2, ..., V_n) \neq 0$*

Exemple 10. *Soient $V_1 = (1, 2, 0), V_2 = (0, -1, 1), V_3 = (0, 0, 1)$, forment une base de $\mathbb{R}^3$, car $\det(V_1, V_2, V_3) = -1 \neq 0$.*

3.5 Matrices inversibles

Définition 12. *Soit $A \in \mathcal{M}(n, n)(\mathbb{K})$ on dit que A est invesible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}(n, n)(\mathbb{K})$ telle que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.*

Exemple 11. *Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$*

est inversible et ceci en cherchant la matice $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = B{\cdot}A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 12. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *On vérifie par le calcul que* $A^2 - 5A = 2I_2$. *Par suite* $A(\frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2) = I_2$. *On conclut alors que* $A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2$.

THÉORÈME 2. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on a :*

$$A \textit{ est inversible } \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0,$$

et dans ce cas la matrice inverse de A *est donnée par :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$$

Où C^t *est la comatrice de* A.

DÉFINITION 13. *Soit* $A = (aij)1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \in \mathbb{M}^n(\mathbb{K})$, *on appelle cofacteur d'indice* i *et* j *de* A *le scalaire*

$$cij = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

Avec A_{ij} *est la matrice déduite de* A *par suppression de la ligne* i *et la colonne* j. *La matrice* $C = (cij)1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ *est appelée la matrice des cofacteurs et la matrice* C^t *est appellée la comatrice de* A.

EXEMPLE 13. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $det(A) = 2 \neq 0$ *donc elle est inversible, de plus*

$$A^{-1} = \frac{1}{2} C^t = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

où

$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$, $C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$,

$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$,

$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$,

$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ $C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$
$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$
donc la matrice des cofacteurs est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et la comatrice et

$$C^t = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $A^{-1}A = I_3 = AA^{-1}$.

Proposition 4. *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *Si* A *et* B *sont inversibles alors* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. *Si* A *est inversible alors* A^{-1} *est inversible et* $(A^{-1})^{-1} = A$.

3.6 Rang d'une matrice

Définition 14. *Soit* $A \in \mathcal{M}(n, p)(\mathbb{K})$, *on appelle rang de* A *et on note* rgA *l'ordre de la plus grande matrice carrée* B *prise (extraite) dans* A *telle que* $detB \neq 0$.

Exemple 14.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0, \ rgA = 2$$

.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det B = 0, \ rgB = 1$$

.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rgA < 4 (rgA \leq 3)$ la plus grande matrice carrée contenue dans A est d'ordre 3, dans cet exmple on a : 4 possibilité :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$detC_1 = detC_2 = 0 \text{ et } detC_3 = detC_4 = 0 \text{ donc le } rgA < 3$$

et on a :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow rgA = 2.$$

THÉORÈME 3. *Le rang d'une matrice est égale au nombre maximale de vecteurs colonnes linéairement indépendants.*

THÉORÈME 4. *Soit $A \in \mathcal{M}^n(^K)$. On a équivalence entre :*

1. *A est inversible ;*
2. *$Rg(A) = n$.*

PROPOSITION 5.

$$\forall A \in \mathcal{M}^n(^K), rgA = rgA^t$$

1 Lien entre le rang d'une matrice et celui d'une application associée

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$ une matrice de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$, on considère deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels E de dimension p et F de dimension n munis de leurs bases canoniques $B = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$ et $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$, on considère l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ dont la matrice associée à f relativement à B et B' est la matrice A. Autrement dit $A = M_{BB'(f)}$, ou encore de manière équivalente

$$\forall j \in \{1, ..., p\}, f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i$$

Montrons que le rang de l'application f et le rang de la matrice associée A. On rappelle que le ranf de f et défini comme la dimension du sous espace Imf, ce dernier étant engendré par les image par f de la base B de E, c'est à dire

$$Imf = Vect(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_p))$$

Puisque B'est la base canonique de F, on a pour tout $j = \{1, ..., p\}$

$$\begin{aligned}
f(e_j) &= a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + ... + a_{nj}e'_n \\
&= a_{1j}(1,0,...,0) + a_{2j}(0,1,0,...,0) + ... + a_{nj}(0,0,...,1) \\
&= (a_{1j},0,...,0) + (0,a_{2j},0,...,0) + ... + (0,0,...,a_{nj}) \\
&= (a_{1j},a_{2j},...,a_{nj})
\end{aligned}$$

Or $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})$ est un vecteur de F dont les coefficients sont rangée dans la j-ième colonne C_j de la matrice A nous l'avons noté c_j, ainsi

$$Imf = Vect(c_1, c_2, ..., c_p)$$

de l'égalité de ces deux sous espaces, on déduit l'égalité de leur dimension

$$dim(Imf) = dim(Vect(c_1, c_2, ..., c_p))$$

c'est à dire

$$rg(f) = rg(A)$$

3.7 Matrices et Changements de Bases

DÉFINITION 15. *Soit E un e.v et soit $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $B' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ deux bases pour E, avec Les vecteurs de base de B peuvent s'exprimer dans B' selon les relations* $\begin{cases} e_1 = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{n1}e'_n \\ e_2 = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{n2}e'_n \\ e_3 = a_{13}e'_1 + a_{23}e'_2 + ... + a_{n3}e'_n \\ .... \\ e_n = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{nn}e'_n \end{cases}$

On appelle matrice de passage de B' à B la matrice carrée P définie par

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 15. *On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ de la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, définie par $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ et de la base $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ définie par $e'_1 = (1,0,-1), e'_2 = (1,-1,0), e'_3 = (1,1,1)$*
Pour expliciter la matrice de passage de la base B à B', il faut d'abord écrire les trois vecteurs de la base B' en fonction de trois vecteurs de la base B, cette étape préliminaire est ici trés facile puisque ici la base B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a immédiatement

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_2 \\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

On en déduit alors l'expression de la matrice P de passage de B à B'

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 Propriétés des matrices de passage

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel muni des bases B et B', la matrice de passage P de B à B' est la matrice representant l'application identité $Id_E : x \in E \longmapsto x \in E$ relativement aux bases B et B' en d'autre termes

$$P = Mat_{B,B'}(Id_E)$$

PROPOSITION 6. *La matrice de passage d'une base B à une base B' est la matrice inverse de la matrice de passage de B' vers B*

$$M(B', B)(Id_{\mathbb{R}^3}) = (M(B, B')(Id_{\mathbb{R}^3}))^{-1}$$

EXEMPLE 16. *Reprenons l'exemple de $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et de la base $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ définie par $e'_1 = (1, 0, -1), e'_2 = (1, -1, 0), e'_3 = (1, 1, 1)$*

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_2 \\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

$$(1, 0, 0) = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = (\lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(1, -1, 0) + \lambda_3(1, 1, 1)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$$

$$(0, 1, 0) = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = (\lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(1, -1, 0) + \lambda_3(1, 1, 1)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = -\frac{2}{3}$$

$$(0, 0, 1) = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = (\lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(1, -1, 0) + \lambda_3(1, 1, 1)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}, \lambda_1 = -\frac{2}{3}$$

Donc

$$M_{B'B}(Id_{\mathbb{R}^3}) = Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'on voit qu'on a effectivement $Q = P^{-1}$, on vérifie l'une des deux égalités

$$P \times Q = I_3 \text{ ou } Q \times P = I_3$$

THÉORÈME 5. *Soient E un espace vectoriels muni des base B et C,F un espace vectoriel muni des bases B' et C' et f un application linéaire de E dans F alors les deux matrices $A = M_{BB'}(f)$ et $B = M_{B'B}(f)$ toutes les deux de même type, vérifient :*

$$B = Q^{-1}AP$$

où P est la matrice de passage de B à C et où Q et la matrice de passage de B' à C'