L1 Informatique
Algèbre 2

Université Badji Mokhtar Annaba
Faculté Des Technologies
Département d'informatique

2022/2023
Durée : 1h30

Examen D'Algèbre 2

Exercice 1 *(7 points)*

Soient E et F deux sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x + y - 2z = 0 \quad et \quad 2x - y - z = 0\}$$
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\}$$

On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Soient $v_1 = (1, 1, 1); v_2 = (1, 0, 1);$ et $v_3 = (0, 1, 1)$

1. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$*
2. *Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.*
3. *Montrer que $\{v_2, v_3\}$ est une base de F.*
4. *Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.*
5. *A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$*

Exercice 2 *(6 points)*

Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (x, 3x + 2y - z, 2y - z)$$

1. *Monter que f est une application linéaire.*
2. *Déterminer* $\ker f$ *le noyau de f, puis donner une base de* $\ker f$ *et en déduire* $\dim(\ker f)$.
3. *f est-elle injective ? f est elle-surjective ? Justifier votre réponse*
4. *Déterminer une base de Imf.*

Exercice 3 *(7 points)*

1. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

   a. *Vérifier que A est inversible.*

   b. *Calculer A^2, puis trouver deux réels α et β,tels que : $A^2 = \alpha A + \beta I$ avec*

   $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   c. *Donner A^{-1} la matrice inverse de A.*

2. *Soit le système d'équation suivant :*

   $$\begin{cases} x - 3y + 6z = 3 \\ 6x - 8y + 12z = 2 \\ 3x - 3y + 4z = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

   a. *Montrer que ce système est un système de Cramer.*

   b. *Trouver la solution du système (1) par la méthode de Cramer.*

Corrigé de l'examen d'Algèbre 2

Ex 01: $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y-2z=0 \text{ et } 2x-y-z=0\}$

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y-z=0\}$

$v_1=(1,1,1)\ ;\ v_2=(1,0,1)\ ;\ v_3=(0,1,1)$

1) Montrons que E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

* $(0,0,0) \in E$ car : $0+0-2(0)=0$ et $2(0)-0-0=0$ (0,5)

* $\forall u,v \in E, \forall \lambda,\beta \in \mathbb{R}$: $\lambda u+\beta v \in E$ (0,5)

$$\lambda u+\beta v = \lambda(x,y,z)+\beta(x',y',z') = (\lambda x+\beta x', \lambda y+\beta y', \lambda z+\beta z')$$

On a : $(\lambda x+\beta x')+(\lambda y+\beta y')-2(\lambda z+\beta z')$

$$= \lambda\underbrace{(x+y-2z)}_{=0 \text{ car } u\in E}+\beta\underbrace{(x'+y'-2z')}_{=0 \text{ car } v\in E} = 0 \quad (0,5)$$

et $2(\lambda x+\beta x')-(\lambda y+\beta y')-(\lambda z+\beta z')$

$$= \lambda\underbrace{(2x-y-z)}_{=0 \text{ car } u\in E}+\beta\underbrace{(2x'-y'-z')}_{=0 \text{ car } v\in E} = 0 \quad (0,5)$$

donc : E s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

2) a) Déterminons une famille génératrice de E :

Soit $u=(x,y,z) \in E \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 & \cdots (1) \\ \text{et} \\ 2x-y-z=0 & \cdots (2)\end{cases}$

$(1)+(2) \Rightarrow 3x-3z=0 \Rightarrow x=z$

Remplaçons dans (2) $\Rightarrow 2z-y-z=0 \Rightarrow y=z$

donc : $u = (x, x, x) = x(1, 1, 1) = x \cdot v_1$ (1)

$\Rightarrow \{v_1 = (1,1,1)\}$ famille génératrice de E

b) $\{v_1\}$ est une base de E car elle est libre

en effet : $\lambda v_1 = (0,0,0) \Rightarrow \lambda = 0$ (0,5)

3) Montrons que $\{v_2, v_3\}$ est une base de F

⊗ libre :

$v_2 + \beta v_3 = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$\alpha v_2 + \beta v_3 = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) = (0,0,0)$ (0,5)

$(\alpha, \beta, \alpha+\beta) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ (0,5) $\Rightarrow \{v_2, v_3\}$ libre

⊗ génératrice :

Soit $u = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow x + y - z = 0 \Rightarrow z = x + y$

$u = (x, y, x+y) = (x, 0, x) + (0, y, y) = x(1,0,1) + y(0,1,1)$

$= x \cdot v_2 + y \cdot v_3$ (1)

donc : $\{v_2, v_3\}$ famille génératrice.

$\Rightarrow \{v_2, v_3\}$ est une base de F

4) Montrons que $\{v_1, v_2, v_3\}$ libre dans $\mathbb{R}^3$

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,1)$$
$$= (\alpha+\beta, \alpha+\gamma, \alpha+\beta+\gamma) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \alpha+\gamma = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \quad (1)$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.

5) On a : $E \oplus F = \mathbb{R}^3$ car : $\begin{cases} \underset{1}{\underset{\parallel}{\dim E}} + \underset{2}{\underset{\parallel}{\dim F}} = \underset{3}{\underset{\parallel}{\dim \mathbb{R}^3}} \\ \text{et} \\ E \cap F = \{(0,0,0)\} \end{cases}$ (0,5)

Exo 2 :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = (x, 3x+2y-z, 2y-z)$$

1) Montrons que f est une application linéaire : (0,5)

f A.L : $\forall u, v \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : f(\lambda u + \beta v) = \lambda f(u) + \beta f(v$

$u = (x,y,z) \Rightarrow f(u) = (x, 3x+2y-z, 2y-z)$

$v = (x', y', z') \Rightarrow f(v) = (x', 3x'+2y'-z', 2y'-z')$

$\lambda u + \beta v = (\lambda x + \beta x', \lambda y + \beta y', \lambda z + \beta z')$ (1,5)

$f(\lambda u + \beta v) = (\lambda x + \beta x', 3(\lambda x + \beta x') + 2(\lambda y + \beta y') - (\lambda z + \beta z'), 2(\lambda y + \beta y') - (\lambda z + \beta$

$= (\lambda x, 3\lambda x + 2\lambda y - \lambda z, 2\lambda y - \lambda z) + (\beta x', 3\beta x' + 2\beta y' - \beta z', 2\beta y' - \beta$

$= \lambda(x, 3x+2y-z, 2y-z) + \beta(x', 3x'+2y'-z', 2y'-z')$

$= \lambda f(u) + \beta f(v)$.

donc : f A.L

2) a) Déterminons $\ker f$:

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (0,0,0)\}$$ 0,25

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x, 3x+2y-z, 2y-z) = (0,0,0)\}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x+2y-z = 0 \\ 2y - z = 0 \Rightarrow z = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ z = 2y \end{cases}$$

$$\ker f = \{(0, y, 2y) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$$ 1

$$= \{y(0,1,2) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{Vect}\{v_1 = (0,1,2)\}$$

$\ker f$ est un s.e.v de $\mathbb{R}$ engendré par $\{v_1\}$

b.) $\{v_1\}$ base de $\ker f$ car : $\{v_1\}$ est libre 0,5

$\dim(\ker f) = 1$ 0,25

3) * f n'est pas injective car :

$\ker f \neq \{(0,0,0)\}$ 0,5

* f n'est pas surjective car :

d'après théorème du rang : $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker + \dim \text{Im}$

$\dim \text{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2$ 0,5

$\dim \text{Im} f = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$

Ou ! $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ on a : f injective $\Leftrightarrow$ f surjective

Comme f n'est pas injective $\Rightarrow$ f n'est surjective

4) Déterminons une base de Im f :

$$\mathrm{Im} f = \{ f(x,y,z) \,/\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \{ (x, 3x+2y-z, 2y-z) \,/\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \{ (x,3x,0) + (0,2y,2y) + (0,-z,-z) \,/\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \{ x(1,3,0) + y(0,2,2) + z(0,-1,-1) \,/\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$$

0,5 $= \mathrm{Vect}\{ v_1 = (1,3,0), v_2 = (0,2,2), v_3 = (0,-1,-1) \}$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille génératrice de Im f

Comme $\dim \mathrm{Im} f = 2 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ liée

On choisit deux vecteurs parmi les trois et on montre qu'il sont libre, on prend $\{v_1, v_2\}$

$\forall$ $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(1,3,0) + \beta(0,2,2) = (0,0,0)$ 0,5

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ libre.

donc : $\{v_1, v_2\}$ forme une base de Im f

Ex 03 : 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

a) A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ (1)

donc : A est inversible

b) * $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ (1)

* $A^2 = \alpha A + \beta I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & -3\alpha & 6\alpha \\ 6\alpha & -8\alpha+\beta & 12\alpha \\ 3\alpha & -3\alpha & 4\alpha+\beta \end{pmatrix}$

donc : $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ (1)

c) $A^2 = -A + 2I \Rightarrow A^2 + A = 2I$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(A^2 + A) = I \Rightarrow A\left[\frac{1}{2}(A+I)\right] = I$

ainsi : $A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 3 & -\frac{7}{2} & 6 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ (0,75)

2) $\begin{cases} x - 3y + 6z = 3 \\ 6x - 8y + 12z = 2 \\ 3x - 3y + 4z = 1 \end{cases}$ ---- (1)

a) Le système est système de Cramer ssi : $\det(A) \neq 0$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b} \Leftrightarrow AX = b$ (1)

$\det(A) = 4 \neq 0$ donc : (1) est un système de Cramer

(6)

b) La solution du système (1) par la méthode de Cramer :

$$x = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & -8 & 12 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 3$$ 0,75

$$y = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8$$ 0,75

$$z = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 6 & -8 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4$$ 0,75

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$