**Université Badji Mokhtar Annaba-Faculté de Technologie-Département Informatique-2023-2024**

 **Module : Méthodes Numériques-2LMD**

Durée : 1h30mn

 **Corrigé-type Examen** Date : 24/01/2024

**Exercice 1 (4 points) :**

Décomposez la matrice A par la méthode de Factorisation LU **Doolittle** puis déduire le déterminant de A. $A= \left(\begin{array}{c}1 2 3\\3-1 2\\3 0 1 \end{array}\right)$

|  |
| --- |
| 1. **Relation des coefficients de A avec L et U**

0.25 a11= u11 = 1 l11=1, l22=1, l33=1, l12=0, l13=0, l23=0, u21=0, u31=0, u32=00.25a12= u12 =20.25a13= u13 =30.25a21= l21u11 =3 => l21=30.25a22=l12u12 +u22 = -1 => u22=-7 0.25a23= l21u13 + u23 = 2 => u23=-70.25a31= l31u11 = 3 => l31=30.25a32= l31u12 + l32 + l32u22 =0 => l32=6/7=0.850.25a33= l31u13 + l32u23 + u33 = 1 => u33=-21. **Résultats des matrices L et U**

L $= \left(\begin{array}{c} 1 0 0\\3 1 0\\3 0.85 1\end{array}\right) U= \left(\begin{array}{c}1 2 3\\0 -7 -7\\0 0 -2\end{array}\right)$**0.5 0.5**1. **Calcul du déterminant de A : det(A)**

**Formule : det(A)= ∏ |lii|\*∏ |uii| i=1 à 3 0.5****Résultat : det(A)= (1\*1\*1\*)\*(1\*7\*2)= 14 0.25 (0 si la matrice L et U sont erronées ou formule erronée)**  |

**Exercice 2( 9 points) :** Résoudre le système linéaire suivant par la méthode de Gauss, triangulation inférieure.

x1 + 3x2 + 3x3 = 0

2x1 + 2x2 + 0 = 2

3x1 + 2x2 + 6x3 = 11

|  |
| --- |
| 1. **Ecriture matricielle du système sous forme A \* X = b**

$$ \left(\begin{array}{c}1 3 3\\2 2 0\\3 2 6\end{array}\right) \* \left(\begin{array}{c}x1\\x2\\x3\end{array}\right)= \left(\begin{array}{c}0\\2\\11\end{array}\right)$$ |
| 1. **Triangulation inférieure**

**Etape K=1** |
| **Ligne3 : ligne pivot 0.25 Pour l’exercice2 :**  **\*la moitié de la note s’il n’y a pas de Justification ou**  **justification erronée****a31(2) = 3 0.25 \* zéro si la logique du calcul est incohérente** **a32(2) = 2 0.25****a33(2) = 6 0.25** |
| **Ligne2 : ne change pas a23 =0 1 (réparties comme la ligne au-dessus)** **a21(2)= 2****a22(2)= 2****a23(2) = 0** |
| **Ligne1 : pivot = a13/a33 = 3/6= 1/2 1****a13(2)= 0****a12(2)= a12(1) – pivot \* a32(1) = 3 – (½) \* 2 = 2****a11(2)= a11(1) – pivot \* a31(1) = 1 – (½) \* 3 = -1/2** |
| **Vecteur b : 0.75****b1(2)= b1 – pivot \* b3(1) = -11/2****b2(2)= 2****b3(2)= 11** |
| **Etape K=2** |
| **Ligne3 : ne change pas 1****a31(3)= 3****a32(3)= 2****a33(3)= 6** |
| **Ligne2 :ligne pivot 1****a21(3)= 2****a22(3)= 2****a23(3)= 0** |
| **Ligne1 : pivot = a12/a22= 2/2 = 1 1****a11(3)= a11(2) – pivot \* a21(2) = -1/2 – (1)\* 2 = (-1-4)/2=-5/2****a12(3)= 0****a13(3)=0** |
| **Vecteur b : 0.75****b1(3)= b1(2) – pivot \* b2(2) = -11/2 – 1 \* 2 = (-11 – 4)/2 = -15/2 = -7.5****b2(3)= 2****b3(3)= 11** |
| 1. **Système triangulaire inférieur**

-5/2x1 + 0 + 0 = -7.52x1 + 2x2 + 0 = 23x1 + 2x2 + 6x3 = 11 |
| 1. **Résolution du système triangulaire inférieur**

 **x1 = -7.5 \* 2/5 0.25 = 30.25** **x2 = (2-6)/2 0.25 = -20.25** **x3 = (11- 9 +4)/60.25 = 6/6 = 1 0.25** |

**Exercice 3 ( 7 points) :** Résoudre le système suivant par la méthode de Jacobi avec ε=10-3, x(0)= (0,0,0)t  et kmax=5 (kmax est le maximum d’itérations à effectuer)

 4x1 + x2 -x3 = 10

 2x1 + x2 +35x3 = 22

 x1 + 32x2 + 2x3 = -14

|  |
| --- |
| 1Vérification de la condition de convergence 1. formule pour le test de la convergence : **0.25**

1. Tester la convergence pour :

Ligne1 : |1|+|-1| < |4| satisfait **0.5**Ligne2 : |2|+|-35| > |1| ne satisfait pas **0.5**Ligne3 : |1|+|-32| > |2| ne satisfait pas **0.5**1. Conclusion : le système actuel n’assure pas la convergence **0.5**, on procède à la permutation de la ligne2 et la ligne3 **0.5**
2. Nouveau système :**0.5**

 4x1 + x2 -x3 = 10 satisfait  x1 + 32x2 + 2x3 = -14 satisfait 2x1 + x2 +35x3 = 22 satisfait  |
| 1. le détail pour le calcul des racines :

X1k+1= (10-x2k+x3k)/4 **0.75**X2k+1= (-14 –x1k-2x3k)/32 **0.75**X3k+1= (22- 2x1k-x2k)/35 **0.75** |
| 1. Rappeler la formule du test d’arrêt **: 0.25**

 |X(k) – X(k-1)| <= ε |
| 1. le tableau avec les résultats **0.25 pour chaque ligne**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| K=0 | K=1 | K=2 | K=3 | K=4 | K=5 |
| x1(0)=0.2272 | 2.5477 | 2.7717 | 2.7629 | 2.7603 | 2.7601 |
| x2(0)=0.4375 | -0.4838 | -0.5548 | -0.5551 | -0.5542 | -0.5541 |
| x3(0)=0.6285 | 0.6030 | 0.4968 | 0.4860 | 0.4865 | 0.4866 |

 |
| 1. Convergence satisfaite Oui/Non et si Oui, à quelle itération, il converge ? Justifiez

La convergence est satisfaite à k=5 **0.25**Justification **0.25**|X15-X14| < 0.001 |X25-X24| < 0.001|X35-X34| < 0.001Solution du système d'équations avec la méthode de Jacobi: X=[2.7601, -0.5541, 0.4866 ]t |