Méthodes Numériques

Chapitre1 : Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

Plan de l'Exposé

1. Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires : Introduction
2. Méthode d'élimination de Gauss
   - Résolution d'un système triangulaire
   - Triangulation d'une matrice carrée : transformation d'un système linéaire carrée en un système triangulaire
3. La méthode Factorisation LU
   - Calcul des matrices L et U
   - Résolution d'un système triangulaire inférieur $LY = b$
   - Résolution d'un système triangulaire supérieur $UX = Y$
   - Factorisation LU : Déduction du déterminant de la matrice A
   - Exercice
4. La méthode de décomposition de Cholesky
   - Rappel
     - Transposée d'une matrice
     - matrices symétriques définies positives
   - Théorème de Cholesky :

1. Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires : Introduction
2. Méthode d'élimination de Gauss
   - Résolution d'un système triangulaire
   - Triangulation d'une matrice carrée : transformation d'un système linéaire carrée en un système triangulaire
3. La méthode Factorisation LU
   - Calcul des matrices L et U
   - Résolution d'un système triangulaire inférieur $LY = b$
   - Résolution d'un système triangulaire supérieur $UX = Y$
   - Factorisation LU : Déduction du déterminant de la matrice A
   - Exercice
4. La méthode de décomposition de Cholesky
   - Rappel
     - Transposée d'une matrice
     - matrices symétriques définies positives
   - Théorème de Cholesky :

Généralités :Soit à résoudre un système de n équations linéaires à m inconnues $(x_1, x_2, ..., x_m)$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = b_2$
...
...
$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m = b_n$

Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

Ce système peut être écrit sous la forme : $AX = b$ avec A_{nm} est une matrice et X_m, b_n sont des vecteurs.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

On ne change pas la solution d'un système linéaire si :

- On permute deux lignes,
- On permute deux colonnes,
- On multiplie une ligne par un réel non nul,
- On ajoute une ligne à une autre,
- Nous allons donc utiliser ces transformations pour se ramener à un cas simple est équivalent.

Définition

Une méthode de résolution d'un système linéaire est dite directe si la solution du système peut être obtenue en un nombre finis d'opérations.

Système linéaire carré

Définition

Un système linéaire carré (Cramer) est un système de n équations à n inconnues.

$$
(S)\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 & (\mathrm{L}_1) \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 & (\mathrm{L}_2) \\
\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n & (\mathrm{L}_n)
\end{cases}
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

Système linéaire carré : Résolution

Pour résoudre un système linéaire carré, il existe plusieurs solutions :

- Solution basée sur l'inversion de la matrice A : $A^{-1}AX = A^{-1}b \Rightarrow X = A^{-1}b$,
- Triangulation du système et résolution d'un système triangulaire.

1. Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires : Introduction

2. Méthode d'élimination de Gauss
   - Résolution d'un système triangulaire
   - Triangulation d'une matrice carrée : transformation d'un système linéaire carrée en un système triangulaire

3. La méthode Factorisation LU
   - Calcul des matrices L et U
   - Résolution d'un système triangulaire inférieur $LY = b$
   - Résolution d'un système triangulaire supérieur $UX = Y$
   - Factorisation LU : Déduction du déterminant de la matrice A
   - Exercice

4. La méthode de décomposition de Cholesky
   - Rappel
     - Transposée d'une matrice
     - matrices symétriques définies positives
   - Théorème de Cholesky :

Méthode d'élimination de Gauss

Principe :

La méthode de Gauss consiste à transformer le système initial $(AX = b)$ en un système équivalent $(A'X = b')$ avec A' une matrice triangulaire.

On passe par deux étapes :

- Triangulation supérieure,
- Une remontée(résolution d'un système triangulaire supérieur),
- ou
- Triangulation inférieure,
- Une descente (résolution d'un système triangulaire inférieur),

Résolution d'un système triangulaire supérieur

Si A est une matrice triangulaire supérieure et si aucun élément diagonal n'est nul, la solution du système $AX = b$ est :

$x_n = b_n/a_{nn}$

$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j)/a_{ii}$ avec $i = n-1, ..., 1$

Résolution d'un système triangulaire supérieur

Exemple

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$
$$0 + 2x_2 - 2x_3 = 2$$
$$0 + 0 + 2x_3 = 1$$

On peut l'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Résolution d'un système triangulaire supérieur

- Dont la solution est:

  - $x_3 = {}^1/_2$
  - $x_2 = \dfrac{2+2({}^1/_2)}{2} = {}^3/_2$
  - $x_1 = \dfrac{1-3({}^3/_2)-{}^1/_2}{3} = -{}^4/_3$

Résolution d'un système triangulaire inférieur

Si A est une matrice triangulaire inférieure et si aucun élément diagonal n'est nul, la solution du système $AX = b$ est :

$x_1 = b_1/a_{11}$

$x_i = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j)/a_{ii}$ avec $i = 2, ..., n$

Résolution d'un système triangulaire inférieur

Exemple

$3x_1 + 0 + 0 = 3$
$2x_1 - 2x_2 + 0 = 2$
$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2$

On peut l'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Résolution d'un système triangulaire inférieur

- D'où par identification, on a
  - $3x_1 = 3 \leftrightarrow x_1 = 1$
  - $2x_1 - 2x_2 = 2 \leftrightarrow x_2 = \frac{2x_1 - 2}{2} = 0$
  - $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \leftrightarrow x_3 = \frac{x_1 + 2x_2 - 2}{2} = -{}^{1}/_{2}$
- La solution du système est donc
  - $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -{}^{1}/_{2} \end{pmatrix}$

1. Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires : Introduction

2. Méthode d'élimination de Gauss
   - Résolution d'un système triangulaire
   - Triangulation d'une matrice carrée : transformation d'un système linéaire carrée en un système triangulaire

3. La méthode Factorisation LU
   - Calcul des matrices L et U
   - Résolution d'un système triangulaire inférieur $LY = b$
   - Résolution d'un système triangulaire supérieur $UX = Y$
   - Factorisation LU : Déduction du déterminant de la matrice A
   - Exercice

4. La méthode de décomposition de Cholesky
   - Rappel
     - Transposée d'une matrice
     - matrices symétriques définies positives
   - Théorème de Cholesky :

Triangulation supérieure

Soit un système linéaire $AX = b$ (A est une matrice carrée $(n * n)$ et b, un vecteur de n éléments. il y a n étapes :)

- A l'étape k, on annule sous la diagonale les coefficients de la colonne k
- A chaque ligne $i > k$, on soustrait la ligne k multipliée par $a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{k}$

Formule :$k = 1, ...n - 1$, $i = 2, ..., n$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} * a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$$

$$b_{i}^{(k+1)} = b_{i}^{(k)} - b_{kj}^{(k)} * a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$$

Résolution par la méthode de Gauss avec Triangulation supérieure

Exemple : Résoudre par la méthode de Gauss le système suivant :

Triangulation supérieure

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Résolution par la méthode de Gauss avec Triangulation supérieure

$k = 1, i = 2, j = 1$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} * a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$$

- $a^{(2)}[2,1] = a[2,1] - a[1,1] * a[2,1]/a[1,1]$
- $a^{(2)}[2,1] = 1 - 1 * 1/1 = 0$

$k = 1, i = 2, j = 2$

- $a^{(2)}[2,2] = a[2,2] - a[1,2] * a[2,1]/a[1,1]$
- $a^{(2)}[2,2] = 1 - 2 * 1/1 = -1$

$k = 1, i = 2, j = 3$

- $a^{(2)}[2,3] = a[2,3] - a[1,3] * a[2,1]/a[1,1]$
- $a^{(2)}[2,3] = 2 - 3 * 1/1 = -1$

Résolution par la méthode de Gauss avec Triangulation supérieure

$k = 1, i = 3, j = 1$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} * a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$$

- $a^{(2)}[3,1] = a[3,1] - a[1,1] * a[3,1]/a[1,1]$
- $a^{(2)}[3,1] = 1 - 1 * 1/1 = 0$

$k = 1, i = 3, j = 2$

- $a^{(2)}[3,2] = a[3,2] - a[1,2] * a[3,1]/a[1,1]$
- $a^{(2)}[3,2] = 1 - 2 * 1/1 = -1$

$k = 1, i = 3, j = 3$

- $a^{(2)}[3,3] = a[3,3] - a[1,3] * a[3,1]/a[1,1]$
- $a^{(2)}[3,3] = 1 - 3 * 1/1 = -2$

Résolution par la méthode de Gauss avec Triangulation supérieure

$k = 1, i = 2$

$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} * a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$

- $b^{(2)}[2] = b[2] - b[1] * a[2, 1]/a[1, 1]$
- $b^{(2)}[2] = 5 - 4 * 1/1 = 1$

$k = 1, i = 3$

- $b^{(2)}[3] = b[3] - b[1] * a[2, 1]/a[1, 1]$
- $b^{(2)}[3] = 6 - 4 * 1/1 = 2$

Résolution par la méthode de Gauss avec Triangulation supérieure

matrice $A^{(2)}$ et $b^{(2)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Résolution par la méthode de Gauss avec Triangulation supérieure

$k = 2, i = 3, j = 2$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} * a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$$

- $a^{(3)}[3, 2] = a[3, 2] - a[2, 2] * a[3, 2]/a[2, 2]$
- $a^{(3)}[3, 2] = -1 - (-1) * -1/ - 1 = 0$

$k = 2, i = 3, j = 3$

- $a^{(3)}[3, 3] = a[3, 3] - a[2, 3] * a[3, 2]/a[2, 2]$
- $a^{(3)}[3, 3] = -2 - (-1) * (-1/ - 1) = -1$

Résolution par la méthode de Gauss avec Triangulation supérieure

$k = 2, i = 3$

- $b^{(3)}[3] = b[3] - b[2] * a[3,2]/a[2,2]$
- $b^{(3)}[3] = 2 - (1) * -1/-1 = 1$

Résolution par la méthode de Gauss avec Triangulation supérieure et remonté

matrice $A^{(3)}$ et $b^{(3)}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ -x_2 - x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Résolution par la méthode de Gauss avec Triangulation supérieure et remonté

- $x_3 = -1$
- $x_2 = \frac{1+(-1)}{-1} = 0$
- $x_1 = \frac{4-2(0)-3(-1)}{1} = 7$

1. Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires : Introduction

2. Méthode d'élimination de Gauss
   - Résolution d'un système triangulaire
   - Triangulation d'une matrice carrée : transformation d'un système linéaire carrée en un système triangulaire

3. La méthode Factorisation LU
   - Calcul des matrices L et U
   - Résolution d'un système triangulaire inférieur $LY = b$
   - Résolution d'un système triangulaire supérieur $UX = Y$
   - Factorisation LU : Déduction du déterminant de la matrice A
   - Exercice

4. La méthode de décomposition de Cholesky
   - Rappel
     - Transposée d'une matrice
     - matrices symétriques définies positives
   - Théorème de Cholesky :

La Factorisation LU : Motivation

Imaginons que nous avons à résoudre plusieurs systèmes linéaires avec la même matrice A et des b différents : $AX = b_1$, $AX = b_2$, $AX = b_3, \ldots$;

Et que les vecteurs b ne sont pas connus initialement et sont calculés au cours du processus ;

Donc, il n'est pas raisonnable de recommencer la triangulation de Gauss à chaque résolution ;

La Factorisation LU : Principe

- La factorisation est une solution qui consiste à factoriser la matrice A sous la forme $A = LU$ où :
  1. L est une matrice triangulaire inférieure (L=lower ;)
  2. U une matrice triangulaire supérieure (U=upper) ;
- L et U sont conservées en mémoire, par la suite, tout système $AX = b \Leftrightarrow LUX = b$ et sera remplacé par la résolution des deux systèmes équivalents.

Résolution d'un système linéaire par Factorisation LU :

1. Calcul des matrices triangulaires inférieure L et supérieure U ;
2. Résolution du système triangulaire inférieur $LY = b$ avec $Y = UX$;
3. Résolution du système triangulaire supérieur $UX = Y$;

La Factorisation LU

L'équation matricielle $A = LU$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
. & . & & . \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\
l_{21} & l_{22} & 0 & . & & . & 0 \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & & & 0 \\
. & . & . & & & & . \\
. & . & & . & & & . \\
. & . & & & & . & 0 \\
l_{n1} & l_{n2} & \ldots & & & . & l_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_{11} & u_{12} & \ldots & & u_{1n} \\
0 & u_{22} & \ldots & & u_{2n} \\
0 & 0 & u_{31} & . & u_{3n} \\
0 & 0 & & . & u_{4m} \\
. & . & & . & . \\
. & . & & & u_{n-1n} \\
0 & 0 & 0\,0 & 0 & u_{nn}
\end{pmatrix}
$$

Factorisation LU : choix de solution : Crout ou Doolittle

- La décomposition LU n'est pas unique
- Il faut choisir au préalable des choix arbitraires
- Les deux choix les plus populaires consistent à imposer que l'une des matrices L ou U a la valeur 1 pour ses éléments de diagonale :
- Choix 1 : décomposition **Crout** : si les éléments de la diagonale de U sont fixés à 1
- Choix 2 : décomposition **Doolittle** : si les éléments de la diagonale de L sont fixés à 1

La Factorisation LU : Doolittle

Principe :

1. $AX = b \Leftrightarrow LUX = b$, on pose $UX = Y$;
2. Résoudre le système triangulaire inférieur $LY = b$;
3. Résoudre le système triangulaire supérieur $UX = Y$;

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix}$$

La Factorisation LU : Doolittle

Pour déterminer les matrices L_{nn} et U_{nn}, on doit calculer les coefficients l_{ij} et u_{ij} à partir de l'égalité ci-dessous (multiplication de deux matrices $A_{nn} = L_{nn}U_{nn}$) :

$a_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} l_{ik}u_{kj}$

avec $l_{ij} = 0$ pour $i < j$ et $u_{ij} = 0$ pour $i > j$

$l_{ii} = 1$ pour $i = 1, ..., n$

$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{k=i-1} l_{ik}u_{kj}$ avec $i = 2, ..., n$ et $j = i, ...n$ si $i <= j$

$l_{ji} = a_{ji} - \sum_{k=1}^{k=i-1} l_{jk}u_{ki}/u_{ii}$ avec $i = 2, ..., n$ et $j = i, ...n$ si $j > i$

Exemple :La Factorisation LU : Doolittle

Résoudre par la méthode de Factorisation LU (Doolittle) le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exemple :

- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} =$$

- $$A = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$$

Etape1 : Calcul des matrices triangulaires inférieure L et supérieure U

- $a_{11} = u_{11}$
- $a_{12} = u_{12}$
- $a_{13} = u_{13}$

- $a_{21} = l_{21} u_{11}$
- $a_{22} = l_{21} u12 + u_{22}$
- $a_{23} = l_{21} u_{13} + u_{23}$

- $a_{31} = l_{31} u_{11}$
- $a_{32} = l_{31} u_{12} + l_{32} u_{22}$
- $a_{33} = l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} + u_{33}$

Factorisation LU : Etape1 :Calcul de L et U partie1 : Calcul de la 1ere ligne de U, la 1ere colonne et la diagonale de L

$l_{ii} = 1$ pour $i = 1, ..., n$ pour $n = 3$

$l_{11} = 1$, $l_{22} = 1$, $l_{33} = 1$

$u_{11} = a_{11} = 1$, $u_{12} = a_{12} = 2$, $u_{13} = a_{13} = 3$

$l_{21} = a_{21}/u_{11} = 1$, $l_{31} = a_{31}/u_{11} = 1$

Factorisation LU : Etape1 :Calcul de L et U Calcul de la 1ere ligne de U, la 1ere colonne et la diagonale de L

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Factorisation LU : Etape1 :Calcul de L et U Calcul alternatif des autres coefficients de U et de L

$$a_{22} = l_{21}u_{12} + u_{22} \;\Rightarrow\; u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = -1$$

$i = 2,\ j = i = 2,\ k = 1$

$$a_{ij} = l_{ik}u_{kj} + u_{ij} \;\Rightarrow\; u_{ij} = a_{ij} - l_{ik}u_{kj}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $a_{23} = l_{21}u_{13} + u_{23} \;\Rightarrow\; u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = -1$
- $a_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32} * u_{22} \;\Rightarrow\; l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} = 1$

$i = 2,\ j = 3,\ k = 1$

- $a_{ij} = l_{ik}u_{kj} + u_{ij} \;\Rightarrow\; u_{ij} = a_{ij} - l_{ik}u_{kj}$
- $a_{ji} = l_{jk}u_{ki} + l_{ji} * u_{ii} \;\Rightarrow\; l_{ji} = (a_{ji} - l_{jk}u_{ki})/u_{ii}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Factorisation LU : Etape1 :Calcul de L et U Calcul alternatif des coefficients de U et de L

$$a_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u23 + u_{33} \;\Rightarrow\; u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) = -1$$

$i = 3,\ j = 3,\ k = 1, 2$

$$a_{ij} = l_{ik}u_{kj} + l_{ik}ukj + u_{ij} \;\Rightarrow\; u_{ij} = a_{ij} - (l_{ik}u_{kj} + l_{ik}u_{kj})$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcul alternatif des coefficients de U et de L (Doolittle)

Algorithm

Définir une matrice carrée A_{nn}
Initialiser deux matrices carrées L_{nn} *et* U_{nn} à 0
for all $i \in \{1, ..., n\}$ ***do***
  for all $j \in \{i, ..., n\}$ ***do***
    if $i <= j$ ***then***
      $U[i,j] = A[i,j] - (\sum_{k=1}^{k=i-1} L[i,k] * U[k,j])$
    end if
    if $j >= i$ ***then***
      $L[j,i] = (A[j,i] - (\sum_{k=1}^{k=i-1} L[j,k] * U[k,i])/U[i,i]$
    end if
  end for
end for

Calcul alternatif des coefficients de U et de L (Crout)

Algorithm

Définir une matrice carrée A_{nn}
Initialiser deux matrices carrées L_{nn} *et* U_{nn} *à* 0
for all $i \in \{1, ..., n\}$ ***do***
  for all $j \in \{i, ..., n\}$ ***do***
    if $i <= j$ ***then***
      $L[i,j] = A[i,j] - (\sum_{k=1}^{k=i-1} U[i,k] * L[k,j])$
    end if
    if $j >= i$ ***then***
      $U[j,i] = (A[j,i] - (\sum_{k=1}^{k=i-1} U[j,k] * L[k,i])/L[i,i]$
    end if
  end for
end for

1. Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires : Introduction

2. Méthode d'élimination de Gauss
   - Résolution d'un système triangulaire
   - Triangulation d'une matrice carrée : transformation d'un système linéaire carrée en un système triangulaire

3. La méthode Factorisation LU
   - Calcul des matrices L et U
   - Résolution d'un système triangulaire inférieur $LY = b$
   - Résolution d'un système triangulaire supérieur $UX = Y$
   - Factorisation LU : Déduction du déterminant de la matrice A
   - Exercice

4. La méthode de décomposition de Cholesky
   - Rappel
     - Transposée d'une matrice
     - matrices symétriques définies positives
   - Théorème de Cholesky :

Factorisation LU : Etape2 : Résolution d'un système triangulaire inférieur $LY = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

LY=b

- $y_1 = 4$
- $y_1 + y_2 = 5 \;\Rightarrow\; 4 + y_2 = 5 \;\Rightarrow\; y_2 = 1$
- $y_1 + y_2 + y_3 = 6 \;\Rightarrow\; y_3 = 1$

Factorisation LU : Etape3 : Résolution d'un système triangulaire supérieur UX=Y

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

UX=Y

- $x_3 = -1$
- $-x_2 - x_3 = 1 \;\Rightarrow\; x_2 = 0$
- $x_1 + 2x_2 + 3_x 3 = 4 \;\Rightarrow\; x_1 = 7$

Factorisation LU : Déduction du déterminant de la matrice A

- De la solution du système
  - $AX = B$
- et en décomposant la matrice A en
  - $A = LU$
- on déduit le déterminant de la matrice A par
  - $\det A = \det(LU) = detL.detU$

Factorisation LU : Déduction du déterminant de la matrice A

- Comme le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux de cette matrice, on obtient

- $detA = \prod_{i=1}^{i=n} l_{ii}.\prod_{i=1}^{i=n} u_{ii}.$

- **Exemple:** reprenons notre matrice A de l'exemple précédent

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Factorisation LU : Déduction du déterminant de la matrice A

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors, on déduit que

- $\det A = (1.1.1)(1.-1.-1) = 1$

1. Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires : Introduction
2. Méthode d'élimination de Gauss
   - Résolution d'un système triangulaire
   - Triangulation d'une matrice carrée : transformation d'un système linéaire carrée en un système triangulaire
3. La méthode Factorisation LU
   - Calcul des matrices L et U
   - Résolution d'un système triangulaire inférieur $LY = b$
   - Résolution d'un système triangulaire supérieur $UX = Y$
   - Factorisation LU : Déduction du déterminant de la matrice A
   - Exercice
4. La méthode de décomposition de Cholesky
   - Rappel
     - Transposée d'une matrice
     - matrices symétriques définies positives
   - Théorème de Cholesky :

Exercice

Question1 : Décomposer la matrice A_{nn} (n=3) en un produit de matrices L_{nn} U_{nn} par la méthode de factorisation LU en appliquant l'algorithme Doolittle puis en appliquant l'algorithme Crout.

Exercice1

Question2 : Résoudre les systèmes linéaires pour la même matrice A avec les vecteurs b_1 et b_2, $Ax = b_1$ et $AX = b_2$.
$b_1 = (2, 5, 3)$
et $b_2 = (8, 1, 4)$

La méthode de décomposition de Cholesky

1. Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires : Introduction
2. Méthode d'élimination de Gauss
   - Résolution d'un système triangulaire
   - Triangulation d'une matrice carrée : transformation d'un système linéaire carrée en un système triangulaire
3. La méthode Factorisation LU
   - Calcul des matrices L et U
   - Résolution d'un système triangulaire inférieur $LY = b$
   - Résolution d'un système triangulaire supérieur $UX = Y$
   - Factorisation LU : Déduction du déterminant de la matrice A
   - Exercice
4. La méthode de décomposition de Cholesky
   - Rappel
     - Transposée d'une matrice
     - matrices symétriques définies positives
   - Théorème de Cholesky :

Rappel :Transposée d'une matrice

La transposée d'une matrice $A \in M_{n,m}(R)$ est la matrice notée $A^t \in M_{m,n}(R)$

$$a_{ij}^t = a_{ji} \quad i = 1, ..., n \quad j = 1, ..., m \tag{1}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}^t$$

Rappel : matrices symétriques définies positives

Une matrice $A \in M_{nn}$ est dite définie symétrique positive si :

1. $A^t = A$ alors A est symétrique
2. $X^t AX > 0 \forall X \in (R)^n$ alors A est positive
3. $X^t AX = 0$ ssi $X = 0$ alors A est définie

Théorème de Cholesky :

Si $A \in M_{nn}(R)$ est une matrice symétrique réelle définie positive, il existe au moins une matrice B triangulaire inférieure telle que :

$$A = BB^t \tag{2}$$

Supposons que A est une matrice symétrique :

$$AX = b \Leftrightarrow B(B^tX) = b \Rightarrow \begin{cases} BY = b \\ B^tX = Y \end{cases}$$

Algorithme Cholesky

Algorithm

Définir une matrice carrée A_{nn}

Initialiser une matrice B_{nn} *à* 0

for all $i \in \{1, ..., n\}$ ***do***

  for all $j \in \{1, ..., i+1\}$ ***do***

    $s = \sum_{k=1}^{k=j} B[i,k] * B[j,k]$

    if $i = j$ ***then***

      $B[i,j] = \sqrt{A[i,i] - s}$

    else

      $B[i,j] = (A[i,j] - s)/B[j,j]$

    end if

  end for

end for

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Décomposition Cholesky

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{11}b_{21} & b_{11}b_{31} \\ b_{21}b_{11} & b_{21}^2 + b_{22}^2 & b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} \\ b_{31}b_{11} & b_{31}b_{21} + b_{32}b_{22} & b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{11}b_{21} & b_{11}b_{31} \\ b_{21}b_{11} & b_{21}^2 + b_{22}^2 & b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} \\ b_{31}b_{11} & b_{31}b_{21} + b_{32}b_{22} & b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = b_{11}^2 = 1 \Rightarrow b_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$

$a_{12} = b_{11}b_{21} = 2 \Rightarrow b_{21} = a_{12}/b_{11} = 2$

$a_{13} = b_{11}b_{31} = 1 \Rightarrow b_{31} = a_{13}/b_{11}$

$a_{21} = b_{21}b_{11} = 2$

$a_{22} = b_{21}^2 + b_{22}^2 = 5 \Rightarrow b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{21}^2} = 1$

$a_{23} = b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} = 2 \Rightarrow b_{32} = (a_{23} - b_{21}b_{31})/b_{22} = 0$

$a_{31} = b_{31}b_{11} = 1$

$a_{32} = b_{31}b_{21} + b_{32}b_{22} = 2$

$a_{33} = b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 = 7 \Rightarrow b_{33} = \sqrt{a_{33} - (b_{31}^2 + b_{32}^2)} = \sqrt{6}$

Résolution du système triangulaire inférieur $BY = b$

$$BY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2.44 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = b$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0.81 \end{pmatrix}$$

Résolution du système triangulaire supérieur $B^tX = Y$

$$B^tX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2.44 \end{pmatrix}^t * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0.81 \end{pmatrix} = Y$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.66 \\ -3 \\ 0.33 \end{pmatrix}$$

Exercice

Donner la décomposition de cholesky de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 49 & -4 \\ -6 & 1 & -4 & 51 \end{pmatrix}$$

Posons $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$

Ce qui donne les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
b_{1,1}^2 = 4 &\Rightarrow b_{1,1} = 2 \\
b_{1,1} \times b_{2,1} = 0 &\Rightarrow b_{2,1} = 0 \\
b_{1,1} \times b_{3,1} = 12 &\Rightarrow b_{3,1} = \frac{12}{2} = 6 \\
b_{1,1} \times b_{4,1} = -6 &\Rightarrow b_{4,1} = \frac{-6}{2} = -3 \\
b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2 = 1 &\Rightarrow b_{2,2} = 1 \\
b_{2,1} \times b_{3,1} + b_{2,2} \times b_{3,2} = 2 &\Rightarrow b_{3,2} = \frac{2-0}{1} = 2 \\
b_{2,1} \times b_{4,1} + b_{2,2} \times b_{4,2} = 1 &\Rightarrow b_{4,2} = \frac{1-0}{1} = 1 \\
b_{3,1}^2 + b_{3,2}^2 + b_{3,3}^2 = 49 &\Rightarrow b_{3,3} = \sqrt{49-36-4} = \sqrt{9} = 3 \\
b_{3,1}b_{4,1} + b_{3,2}b_{4,2} + b_{3,3}b_{4,3} = -4 &\Rightarrow b_{4,3} = \frac{-4-6\times(-3)-2\times 1}{3} = \frac{12}{3} = 4 \\
b_{4,1}^2 + b_{4,2}^2 + b_{4,3}^2 + b_{4,4}^2 = 51 &\Rightarrow b_{4,4} = \sqrt{51-9-1-16} = \sqrt{25} = 5
\end{aligned}
$$

```
B= [[2.0, 0.0, 0.0, 0.0], [0.0, 1.0, 0.0, 0.0], [6.0, 2.0, 3.0, 0.0], [-3.0, 1.0, 4.0, 5.0]]
```