Département Informatique
L2 LMD

Méthodes Numériques

Coefficient: 2

Crédit : 4

1 cours 1TP

Contenu de la matière

- Chapitre 1: Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires (méthode de Gauss, factorisation LU, Cholesky).

- Chapitre2: Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires (méthode de Jacobi, méthode de Gauss-Siedel), Objectifs de l’enseignement :

- Connaitre et se familiariser avec les méthodes permettant de résoudre numériquement des problèmes mathématiques complexes.

- Implémenter les méthodes étudiées avec Python.

Mode d’évaluation: Examen + évaluation continue des TPs

Généralités sur les méthodes numériques

- Les méthodes numériques sont des méthodes mathématiques pour le calcul d'approximations de solutions de problèmes mathématiques qu'il serait difficile, voire impossible, d'obtenir par des moyens analytiques.

- Ces méthodes sont destinées à être implémentées et exécutées sur machines.

Généralité sur les méthodes numériques

- Les solutions des problèmes calculées par une méthode numérique ne sont pas exactes, elles sont affectées par des erreurs, ce qui nécessite une analyse pour s'assurer de l'exactitude et de la pertinence des résultats qu'elles fournissent.

- L’analyse numérique est la conception et l’étude d’algorithmes pour obtenir des solutions à des ensembles d’équations issus de modèles issus de la physique, de la biologie, de la finance ...

Motivation

- Recherche et développement : études expérimentales coûteuses
- Les modèles considérés sont composés d’ensemble d’équations dont on ne sait pas déterminer de solutions explicites
- Proposer une solution approchée, calculée à l’aide de l’ordinateur.

Chapitre 1: Méthodes directes de résolution des systèmes linéaires

Rappels sur les matrices

- **Définitions**
- **1) Matrice** : une matrice est un tableau de chiffres rangés en lignes et en colonnes.

Exemple: une matrice à 2lignes et 3 colonnes est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

- **2)Ordre d'une matrice** : Une matrice d'ordre m et n possède : m lignes et n colonnes. Dans l'exemple précédent on dira que la matrice est d'ordre (2,3).

- L’ensemble des matrices de n lignes et m colonnes à coefficients réels est noté $Mn,m(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & a_{2m} \\ . & . & & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & & . & & & . \\ . & . & & & & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- **Matrice carrée**: C'est une matrice qui a autant de lignes que de colonnes (n=m)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ exple } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- \- **Matrice colonne** : Elle ne possède qu'une seule colonne et n lignes : matrice (n,1) i.e
  - $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
- **Matrice ligne** : Elle ne possède qu'une seule ligne et m colonnes : matrice (1,m) i.e
  - $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$ exple $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple: calcul de la somme des éléments d'un tableau

$$T = [t_1, t_2, t_3, ..., t_n]$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} T[i]$$

```
T=[5,24,17,95]
s=0
for i in range (len(T)):
        s+= T[i]
        print('itération')
        print("i=",i)
        print("s=",s)
print("la somme des éléments du tableau est",s)
```

```
itération
i= 0
s= 5
itération
i= 1
s= 29
itération
i= 2
s= 46
itération
i= 3
s= 141
la somme des éléments du tableau est 141
```

- **La diagonale** principale d'une matrice est formée par l'ensemble des éléments a_{ii}de la matrice.
- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
- **Une matrice diagonale** est donc une matrice qui a tous ses éléments nuls sauf ceux de sa diagonale principale.
- $$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \text{comme} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- - **La matrice unité** est la matrice diagonale qui n'a que des 1 dans sa diagonale principale.

  - $I_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Et on a pour toute matrice X d'ordre n, et I_n matrice unité d'ordre n
-
  - $XI_n = I_nX = X$
  -

- **Matrice triangulaire supérieur** ($a_{ij} = 0$ pour $i > j$)
- $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$
- **Matrice triangulaire inférieur** ($a_{ij} = 0$ pour $j > i$)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- **Addition** : On ne peut additionner que des matrices de même ordre. On additionne les éléments équivalents (dans la même position dans les deux matrices) de chaque matrice i.e

- $$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$
- $$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

Exemple:

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ i=1…n j= 1…m

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$ i=1…n j= 1…m

```
A=[[2,5,7], [8,15,14], [8,25,69]]
B=[[12,52,20], [20,30,56],[11,87,65]]
C=[]
if len(A)!= len(B):
    print("le nombre de lignes de A doit être = à celui de B")
else:
    if len(A[0]) != len(B[0]):
        print ("le nombre de colonnes de A doit être = à celui de B")
    else:
            for i in range (len(A)):
                C.append([0]*len(A[0]))
                for j in range(len(A[0])):
                    print("itération")
                    print("i=",i,"j=",j)
                    C[i][j]= A[i][j]+ B[i][j]
                    print(C[i][j])

print("C=",C)
```

```
itération
i= 0 j= 0
14
itération
i= 0 j= 1
57
itération
i= 0 j= 2
27
itération
i= 1 j= 0
28
itération
i= 1 j= 1
45
itération
i= 1 j= 2
70
itération
i= 2 j= 0
19
itération
i= 2 j= 1
112
itération
i= 2 j= 2
134
C= [[14, 57, 27], [28, 45, 70], [19, 112, 134]]
```

```python
import numpy as np
A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
B = np.array([[5,3], [51,2]])
S= A+B
P= A*B
print("S=",S)
print("P=",P)
```

```
S= [[ 6  5]
 [54  6]]
P= [[  5   6]
 [153   8]]
```

- **Multiplication d'une matrice par un scalaire**: Tous les éléments de la matrice sont multipliés par ce scalaire.

- $\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$

- Exemple:

- $2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 10 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

```
A=[[2,5,7], [8,15,14], [8,25,69]]
m=3
for i in range (len(A)):
    for j in range(len(A[0])):
        A[i][j]= m*A[i][j]

print("A=",A)
```

```
A= [[6, 15, 21], [24, 45, 42], [24, 75, 207]]
```

- **Multiplication d’une matrice avec un vecteur:** la multiplication n’est possible que si le nombre de colonnes de la matrice est égale à la taille du vecteur.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2m} \\ . & . & & & & . \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & & a_{nm} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\bullet \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$$b_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} * x_j$$

avec i= 1,…,n

```
M=[[2,5,7], [8,15,14], [8,25,12]]
X=[1,2,3]
B=[]
if len(X) != len(M[0]):
   print ("le nombre de colonnes de M doit être = à la taille de X")
else:
    for i in range (len(M)):
        c=0
        for j in range(len(M[0])):
            c+= M[i][j]* X[j]
            print("itération")
            print("i=",i,"j=",j)
            print("c=",c)
        B.append(c)

print("B=",B)
```

```
itération
i= 0 j= 0
c= 2
itération
i= 0 j= 1
c= 12
itération
i= 0 j= 2
c= 33
itération
i= 1 j= 0
c= 8
itération
i= 1 j= 1
c= 38
itération
i= 1 j= 2
c= 80
itération
i= 2 j= 0
c= 8
itération
i= 2 j= 1
c= 58
itération
i= 2 j= 2
c= 94
B= [33, 80, 94]
```

- **Multiplication de 2 matrices *(AxB=C)*** : La multiplication n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Si A (m, p) multiplie B(p, n) alors C est une matrice d'ordre (m, n). La multiplication est effectuée en multipliant terme à terme une ligne de A avec une colonne de B et en additionnant chacun des produits. i.e

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

où $\{c_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + a_{13} b_{31}$

$\{c_{12} = a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22} + a_{13} b_{32}$

$\{c_{21} = a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21} + a_{23} b_{31}$

$\{c_{22} = a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22} + a_{23} b_{32}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * b_{kj}$$

i= 1,…,n
J=1,….,m

- Exemple:
- si A est d'ordre 3 ×3 et B d'ordre 3 ×2 alors A ×B est d'ordre 3 ×2
  - $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

- **Matrice inversible**: Une matrice carrée *A, d'ordre n* est inversible, s'il existe une matrice qu'on note A^{-1}de même ordre que A et qui vérifie:
  - $$A\,A^{-1} = A^{-1}A = I_n$$