Méthodes Numériques

Chapitre2 : Résolution des systèmes d'équations linéaires : Méthodes itératives

Plan de l'Exposé

1. Introduction

1. Introduction

Introduction

On cherche à résoudre une équation de la forme :

- $Ax = b$
- Les méthodes directes fournissent la solution $\overline{x}$ en un nombre fini d'opérations.
- Mais : Si la taille du système est élevée, le nombre d'opérations est important,
- or les erreurs de calcul dépendent directement du nombre de calculs.
- Elles utilisent des propriétés mathématiques nécessitant un calcul exact, il est difficile de tenir compte des erreurs de calcul dans ce processus.

Introduction

Pour cela, On construit une suite de vecteurs $(x^k)k = 0, 1, 2...$ qui tend vers $\overline{x}$:

- Le point de départ est une approximation x^0 de $\overline{x}$ obtenue par exemple par une méthode directe.
- Pour construire cette suite, on utilise la linéarité pour décomposer la matrice A en une partie facilement inversible et un reste.

Principe des itérations successives

- $AX = b$ à résoudre, A matrice carrée d'ordre n
- Écrivons A sous la forme
  $A = M - N \Rightarrow (M - N)X = b \Rightarrow MX = NX + b$
- La méthode itérative associé à l'égalité précédente consiste à partir d'un vecteur initial x^0 à générer la suite $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k+1)}$ de la manière suivante :
  - $x^{(1)} = M^{-1}Nx^{(0)} + M^{-1}b$
  - $x^{(2)} = M^{-1}Nx^{(1)} + M^{-1}b$
  - $x^{(3)} = M^{-1}Nx^{(2)} + M^{-1}b$ ...
  - $x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$

  Posons $T = M^{-1}N$ et $V = M^{-1}b \Rightarrow x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + V$

Décomposition de la matrice

- Choisir une matrice T qui assure la convergence et telle que le calcul de$TX + V$ ne soit pas coûteux.
- D'où la recherche de la décomposition de la matrice A sous la forme de $M - N$ de telle façon que M soit facilement inversible.
- Définissons les matrices D,L,U telles que :
  - $d_{ii} = a_{ii}$ $\forall i$ D matrice diagonale
  - $l_{ij} = -aij$ pour $i > j$, $l_{ij} = 0$ pour $i \leq j$ L matrice triangulaire inférieure
  - $u_{ij} = -aij$ pour $j > i$, $u_{ij} = 0$ pour $j \leq i$ U matrice triangulaire supérieure

à partir de cela on a la relation : $A = D - L - U$ qui correspond aux trois types de décomposition suivantes :

1. Méthode de Jacobi : $A = M - N$ où $M = D$ et $N = L + U$
2. Méthode de Gauss-Seidel : $A = M - N$ où $M = D - L$ et $N = U$
3. Méthode de relaxation :

Méthode de Jacobi :Principe

La matrice A étant décomposée en :
$A = M - N = D - (L + U)$
Le système $AX = b$ devient alors :
$DX - (L + U)X = b$
La méthode itérative de Jacobi s'écrit donc :
$DX^{(k+1)} = (L + U)X^{(k)} + b$, soit :
$X^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)X^{(K)} + D^{-1}b$
qui peut s'écrire sous forme développée :

$$x_1^{k+1} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - .... - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11}$$
$$x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - .... - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22}$$
$$...$$
$$x_n^{k+1} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - .... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)})/a_{nn}$$

Cette méthode suppose des pivots a_{ii} non nuls (si ce n'est pas le cas, une simple permutation de lignes suffit souvent pour vérifier cette condition).

Test d'arrêt, condition de convergence de Jacobi

Test d'arrêt des itérations

Il existe plusieurs tests d'arrêt des itérations, le test présenté ici est appliqué au cas où on est certain des conditions de convergence. On arrête les itérations quand :
$|X^{(k)} - X^{(k-1)}| <= \varepsilon$ (où ε est une précision choisie petite).

condition de convergence de Jacobi

Soit, le système original, la condition suffisante est que la diagonale soit fortement dominante et qui s'écrit :
$\sum_{j=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = 1, n$

Ce qui s'énonce par le théorème suivant : Une condition suffisante pour que T_j converge est que A du système $AX = b$ soit à diagonale fortement dominante. Si la condition de convergence n'est pas vérifiée, elle peut l'être en permutant des lignes de la

Algorithme de Jacobi

Algorithme de Jacobi pour la résolution de $AX = b$

1. étant donné $b, A, X^{(0)}, kmax(nombred'itrationsmax), \varepsilon$
2. $x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})/a_{ii} \quad i = 1, n$ et $k = 0, 1, 2, ..., kmax$
3. arrêter si : $|X^{(k)} - X^{(k-1)}| <= \varepsilon$

Exemple :Résoudre le système suivant par la méthode de Jacobi avec kmax=10 et $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4 \\ 8x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 12 \end{cases}$$

Vérification de la condition de convergence :

$\sum_{j=1,i\neq j}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = 1, n$

$7+2<1(NOK), 8+1<1(NOK), 2+1<9(OK)$ la diagonale n'est pas fortement dominante, on doit effectuer une permutation des lignes 1 et 2, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 12 \end{cases}$$

$1+1<8, 1+2<7, 2+1<9$ condition de convergence satisfaite

Le système récursif pour la méthode de Jacobi s'écrit :

$b, A, X^{(0)} = [0, 0, 0], kmax = 10, \varepsilon = 10^{-3}$

$x_i^{(k+1)} = (b - \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j^{(k)})/a_{ii} \quad i = 1, 3$ et $k = 0, 1, 2, ...10$

$x_1^{(k+1)} = 1 - 0.125 x_2^k + 0.125 x_3^{(k)}$,
$x_2^{(k+1)} = 0.571 + 0.143 x_1^{(k)} + 0.286 x_3^{(k)}$
$x_3^{(k+1)} = 1.333 - 0.222 x_1^{(k)} - 0.111 x_2^{(k)}$

1^{ere} itération :
$x_1^{(1)} = 1$
$x_2^{(1)} = 0.571$
$x_3^{(1)} = 1.333$

2^{eme} itération :
$x_1^{(2)} = 1.095$
$x_2^{(2)} = 1.095$
$x_3^{(2)} = 1.048$

3^{ere} itération :
$x_1^{(3)} = 0.994$
$x_2^{(3)} = 1.027$
$x_3^{(3)} = 0.968$
4^{eme} itération :
$x_1^{(4)} = 0.993$
$x_2^{(4)} = 0.990$
$x_3^{(4)} = 0.998$
5^{ere} itération :
$x_1^{(5)} = 1.001$
$x_2^{(5)} = 0.998$
$x_3^{(5)} = 1.003$

6^{eme} itération :
$x_1^{(6)} = 1.001$
$x_2^{(6)} = 1.001$
$x_3^{(6)} = 1.000$
7^{eme} **itération :**
$x_1^{(7)} = 1.000$
$x_2^{(7)} = 1.000$
$x_3^{(7)} = 1.000$
$|(x_1^{(7)} = 1.000) - (x_1^{(6)} = 1.001)| = \varepsilon$
$|(x_2^{(7)} = 1.000) - (x_2^{(6)} = 1.001)| = \varepsilon$
$|(x_3^{(7)} = 1.000) - (x_3^{(6)} = 1.000)| < \varepsilon$
La convergence a eu lieu à l'itération 7.

méthode de Gauss-Seidel : Principe

La matrice étant décomposée en :

$A = M - N = (D - L) - U$

Dans la méthode itérative de Gauss-Seidel, on ré-écrit de la manière suivante :

$X^{(k+1)} = (D - L)^{-1} U X^{(k)} + (D - L)^{-1} b$

Comme l'inverse de (D-L) peut être compliquée à calculer, on préfère écrire le système comme :

$(D - L) X^{(k+1)} = U X^k + b$

soit encore :

$D X^{(k+1)} = L X^{(k+1)} + U X^{(k)} + b$

ou :

$X^{(k+1)} = D^{-1} L X^{(k+1)} + D^{-1} (U X^{(k)} + b)$

En développant cette récurrence vectorielle on obtient :

$x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - ..... - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11}$

$x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - ..... - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22}$

....

$x_n^{(k+1)} = (b_1 - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - ..... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn}$

Cette méthode ne diffère de celle de Jacobi que par l'emploi immédiat qui est fait des nouveaux estimés $x^{(k+1)}$ à l'itération $(k+1)$.

Comme pour la méthode de Jacobi, les pivots a_{ii} doivent être non nuls.

Même condition de convergence que la méthode de Jacobi.

Algorithme de Gauss-Seidel

Algorithme de Gauss-Seidel pour la résolution de $AX = b$

1. étant donnés $b, A, X^{(0)}, kmax, \varepsilon$
2. $x_i^{(k+1)} = [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}]/a_{ii} \quad i = 1, n$ et $k = 1, 2, ..., kmax$
3. arrêter si : $|X^{(k+1)} - X^{(k)}| <= \varepsilon$

Exemple

résoudre le système de l'exemple précédent par la méthode de Gauss-Seidel avec $\varepsilon = 10^{-3}$.

$x_1^{(k+1)} = 1 - 0.125x_2^k + 0.125x_3^{(k)}$,

$x_2^{(k+1)} = 0.571 + 0.143x_1^{(k+1)} + 0.286x_3^{(k)}$

$x_3^{(k+1)} = 1.333 - 0.222x_1^{(k+1)} - 0.111x_2^{(k+1)}$

1^{ere} itération :

$x_1^{(1)} = 1$

$x_2^{(1)} = 0.571$

$x_3^{(1)} = 1.333$

2^{eme} itération :

$x_1^{(2)} = 1.095$

$x_2^{(2)} = 1.109$

$x_3^{(2)} = 1.967$

3^{ere} itération :
$x_1^{(3)} = 0.982$
$x_2^{(3)} = 0.988$
$x_3^{(3)} = 1.005$
4^{eme} itération :
$x_1^{(4)} = 1.002$
$x_2^{(4)} = 1.002$
$x_3^{(4)} = 0.999$
5^{ere} itération :
$x_1^{(5)} = 1.000$
$x_2^{(5)} = 1.000$
$x_3^{(5)} = 1.000$

6^{ere} itération :
$x_1^{(6)} = 1.000$
$x_2^{(6)} = 1.000$
$x_3^{(6)} = 1.000$ $|(x_1^{(6)} = 1.000) - (x_1^{(5)} = 1.000)| < \varepsilon$
$|(x_2^{(6)} = 1.000) - (x_2^{(5)} = 1.000)| < \varepsilon$
$|(x_3^{(6)} = 1.000) - (x_3^{(5)} = 1.000)| < \varepsilon$
La convergence a eu lieu à l'itération 6.