Université Badji Mokhtar Annaba
Département d'informatique
Durée :1H30mn

Promotion : 2^{eme} année LMD
Année 2023/2024
Documents non autorisés

Examen de Logique mathématique

Exercice 1 (6 pts) :

1. Donnez la table de vérité de la formule F suivante : $(((A \to B) \land (\neg A \land B)) \to B)$. Puis donnez ça nature (Vérifiable, Valide ou invérifiable)**(3 pts)**
2. montrer que la formule F précédente est une formule bien formée dans la logique propositionnelle en se basant sur l'algorithme vu en cours. **(1 pt)**
3. Définissez un système formel qui permet de générer le langage suivant : $(010)^n$ sachant que $n \geq 1$. Précisez les 4 ensembles. **(2 pts)**

Exercice 2 (6 pts) :

1. Réalisez une machine de Turing qui efface le nombre binaire n tel que $n \geq 2$. Le ruban contient plusieurs mots (nombres) séparés par un # et deux # successifs représentent la fin du ruban. L'alphabet A $= \{0, 1\}$ et le symbole blanc est le # .
   Exemple : Au début si le ruban contient # 11# 00001# 0110# 0111## , après l'exécution de la MT, il redevient #### 00001#############. **(4 pts)**
2. Déroulez (exécutez) la machine de turing réalisée sur l'exemple suivant : # 110 # 01 # 010 ##. **(2 pts)**

Exercice 3 (8 pts) :

1. Prouvez que :
   - $\exists y(P(y) \lor Q(y)), P(y) \vdash \forall y P(y) \lor \forall y Q(y)$. **(1,5 pts).**
   - $\neg C \to D, \neg D \vdash D \to C$. **(1,5 pts)**
2. Soit la formule F suivante : $(\forall z P(z, x) \to (\exists x \forall y (Q(x, y) \land P(z)) \to \exists y S(y)))$
   - Donnez l'arbre syntaxique de F. **(1 pt)**
   - Mettez la formule F sous forme clausale en précisant clairement les étapes de transformation. Précisez les clauses obtenues. **(4 pts)**

Les schémas d'axiomes de la logique propositionnelle sont :

- **1a.** $(A \to (B \to A))$
- **1b.** $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
- **1c.** $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- **1d.** $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
- **2.** $A \to (B \to A \land B)$
- **3a.** $A \land B \to A$
- **3b.** $A \land B \to B$
- **4a.** $A \to A \lor B$
- **4b.** $B \to A \lor B$
- **5.** $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C))$
- **6.** $B \to ((B \to C) \to C)$
- **7.** $A \to A$
- **8.** $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$
- **9.** $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$

M.Mendjel

Corrigé type examen logique mathématique

Exercice 1 (6 pts)

1- La table de vérité de la formule $F: (((A \to B) \wedge (\neg A \wedge B)) \to B)$

A	B	$A \to B$	$\neg A \wedge B$	$(A \to B) \wedge (\neg A \wedge B)$	F
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V

(2,5 pts)

- Cette formule est valide. (0,5 pt)

2- En appliquant l'algorithme vu en cours :

$F: (((A \to B) \wedge (\neg A \wedge B)) \to B) \to ((P \wedge (\neg A \wedge B)) \to B) \to ((P \wedge (P \wedge B)) \to B)$

$\to ((P \wedge P) \to B) \to (P \to B) \to P$. Comme à la fin de cette transformation, on a trouvé le symbole "P" seul, donc on conclu que F est une fbf. (1 pt)

3- Le système formel qui permet de générer le langage $(010)^n$ est le suivant :

- L'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ (0,5 pt)
- L'ensemble des axiomes $A = \{010\}$ (0,5 pt)
- L'ensemble $W = \{010, 010010, 010010010, \dots\}$ (0,5 pt)
- L'ensemble des règles $R = \{r: x \to x010\}$ (0,5 pt)

Exercice 2 (6 pts)

1- La machine de Turing est comme suit :

q_0 1 D q_1
q_1 (0/1) G q_3
q_0 0 D q_2
q_2 0 D q_2
q_2 1 D q_1
q_1 # D q_4
q_4 # Arrêt
q_2 # D q_4

q_3 (0/1) G q_3
q_3 # D q_5
q_5 (0/1) # q_5
q_5 # D q_6
q_6 (0/1) # q_5
q_6 # D q_4
q_4 1 D q_1
q_4 0 D q_2

(4 pts)

2- Si le ruban contient #110#01#010##
L'exécution de la machine donne :

(2 pts)

q_0 110 # 01 # 010
1 q_1 10 # 01 # 010
q_3 110 # 01 # 010
q_3 # 110 # 01 # 010 ##
q_5 110 # 01 # 010
q_5 # 10 # 01 # 010
q_6 10 # 01 # 010
q_5 # 0 # . . . . . .
q_6 0 # 01 # . . . . .
q_5 ## 01 # . . . .
q_6 # 01 . . . .

q_4 01 # . . . . .
0 q_2 1 # . . . . .
01 q_1 # . . . . .
01 # q_4 010
" " # 0 q_2 10 ##
" " # 01 q_1 0 ##
" " # 0 q_3 10 ##
" " # q_3 010 ##
" " q_3 # 010 ##
" " # q_5 010 ##
" " # q_5 # 10 ##
q_6 10

... ## q_5 # 0 ##
... ### q_6 0 ##
... ### q_5 ###
... #### q_6 ##
... ##### q_4 #
Arrêt

Exercice 3: (8 pts)

1) $\exists y(p(y) \vee \varphi(y)), p(y) \vdash \forall y\, p(y) \vee \forall y\, \varphi(y)$.

1 $\vdash \exists y(p(y) \vee \varphi(y))$ hyp 1

2 $\vdash p(y)$ hyp 2

(0,5 pt)

3 $\vdash p(y) \to (\exists y(p(y) \vee \varphi(y)) \to p(y))$ sch 1a on a remplacé
le A par $p(y)$
le B par $\exists y(p(y) \vee \varphi(y))$.

4 $\vdash \exists y(p(y) \vee \varphi(y)) \to p(y)$ mp 2,3

5 $\vdash \exists y(p(y) \vee \varphi(y)) \to \forall y\, p(y)$ $R\forall(4)$

6 $\vdash \forall y\, p(y)$ mp 1,5

7 $\vdash \forall y\, p(y) \to \forall y\, p(y) \vee \forall y\, \varphi(y)$ sch 4a on a remplacé
le A par $\forall y\, p(y)$
le B par $\forall y\, \varphi(y)$

(1 pt)

2) $\neg C \to D, \neg D \vdash D \to C$

1 $\vdash \neg C \to D$ hyp 1

2 $\vdash \neg D$ hyp 2

(0,5 pt)

3 $\vdash (\neg C \to D) \to (\neg D \to C)$ sch 8 on a remplacé
le A par C
le B par $\neg D$

4 $\vdash \neg D \to C$ mp 1,3

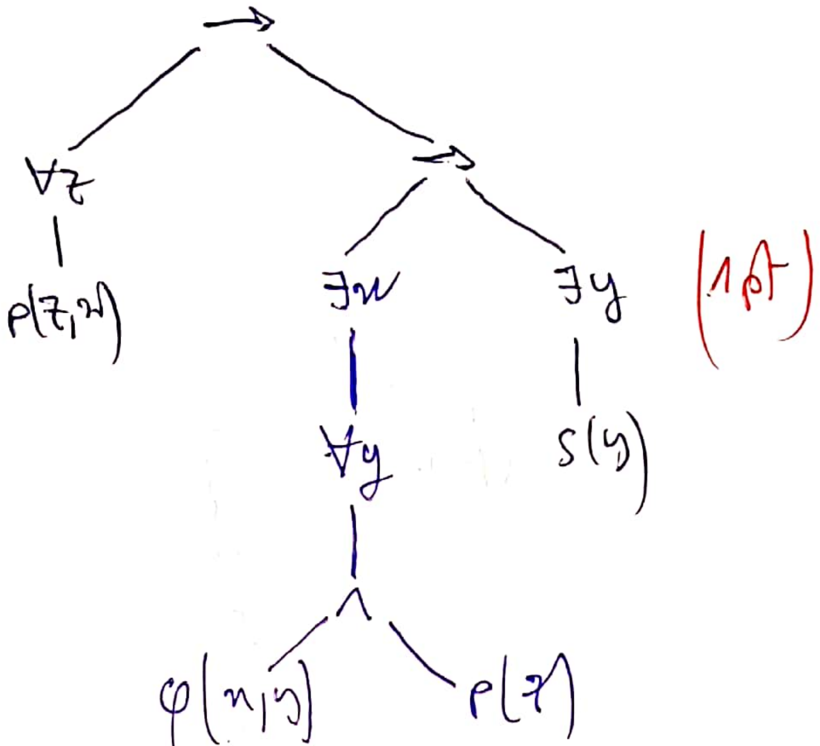
5 $\vdash C$ mp. 2,4

6 $\vdash C \to (D \to C)$ sch 1a on a remplacé le A par C, le B par D.

7 $\vdash D \to C$ mp 5,6

(1 pt)

2- L'arbre syntaxique de F est :



La forme clausale de F est la suivante :

1- Le changement de variables

F' : $(\forall z_1\ p(z_1,x) \rightarrow (\exists x_1 \forall y\ (\varphi(x_1,y) \wedge p(z)) \rightarrow \exists y_1\ S(y_1)))$. (0,5 pt)

2- La forme prenexe

F'' : $\exists z_1 \forall x_1 \exists y \exists y_1\ (p(z_1,x) \rightarrow ((\varphi(x_1,y) \wedge p(z)) \rightarrow S(y_1)))$. (1 pt)

3- La skolemisation

z_1 par a

y par $f(x_1)$

y_1 par $f_1(x_1)$.

F''' : $\forall x_1\ (p(a,x) \rightarrow ((\varphi(x_1,f(x_1)) \wedge p(z)) \rightarrow S(f_1(x_1))))$ (0,5 pt)

4- Elimination ∀

F'''' : $(p(a,x) \rightarrow ((\varphi(x_1,f(x_1)) \wedge p(z)) \rightarrow S(f_1(x_1))))$. (0,5 pt)

5_ Forme FNC

$\neg p(a,x) \vee ((\varphi(x_1, f(x_1)) \wedge p(7)) \rightarrow s(f_1(x_1)))$

$\equiv \neg p(a,x) \vee ((\neg\varphi(x_1, f(x_1)) \vee \neg p(7)) \vee s(f_1(x_1)))$

$\equiv \neg p(a,x) \vee \neg\varphi(x_1, f(x_1)) \vee \neg p(7) \vee s(f_1(x_1))$. (1 pt)

il y a une seule clause

$C_1 = \neg p(a,x) \vee \neg\varphi(x_1, f(x_1)) \vee \neg p(7) \vee s(f_1(x_1))$. (0,5 pt)