Badji Mokhtar – Annaba University
Faculty of Technology
Department of Informatics

L1 Informatics
Algebra 2

2023/2024
Dr. Neggal bilel

Series of Exercises 01
Vector Space

exercice 1 *Find which of the sets $E_1; E_2$ et E_3 are vector subspaces of $\mathbb{R}^3$:*

a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$

b) $E_2 = \{(x + y + z, x - y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$

c) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; e^x e^y e^z = 0\}$

exercice 2 *Let $F = \{f/f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ the set of functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. Are the following subsets vector subspaces of F :*

a) $F_1 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(1) = 0\}$

b) $F_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ is positive}\}$

c) $F_3 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ is increasing function}\}$

exercice 3

1. *Show that the family $B = \{(1, 2); (-1, 1)\}$ is a generating family of $\mathbb{R}^2$*
2. *Which families are linearly independent among the following families :*
   a) $F_1 = \{(1, 1, 0); (1, 0, 0); (0, 1, 1)\}$ *in* $\mathbb{R}^3$
   b) $F_2 = \{(0, 1, 1, 0); (1, 1, 1, 0); (2, 1, 1, 0)\}$ *in* $\mathbb{R}^4$
3. *Show that the family $B = \{(1, 2); (-1, 1)\}$ is a basis of $\mathbb{R}^2$ and the family $F_1 = \{(1, 1, 0); (1, 0, 0); (0, 1, 1)\}$ is a basis of $\mathbb{R}^3$*
4. *Find the coordinates of the vector $v = (-3, 1)$ in the base B.*

exercice 4 *Let F and G two vector subspaces of $\mathbb{R}^3$ defined by :*
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$ *and* $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 2z = 0\}$

1. *Give a basis for F, a basis for G, and deduce their respective dimensions.*
2. *Give a basis for $F \cap G$, and give its dimension.*
3. *Do we have $F \oplus G = \mathbb{R}^3$?*

exercice 5 *We consider in $\mathbb{R}^3$, the subset F defined by :*

$$F = \{(x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

1. *Show that F is a vector subspace of $\mathbb{R}^3$.*
2. *Give a basis for F, and give its dimension.*
3. *F is it equal to $\mathbb{R}^3$*

exercice 6 *Let $\mathbb{P}_2[X]$ the vector space of polynomials of degree less than or equal to 2 with coefficients in $\mathbb{R}$*
$P_1(X) = 1, P_2(X) = X - 1, P_3(X) = X^2, P_4(X) = X(X - 1)$ *elements of* $\mathbb{P}_2[X]$

1. *Show that $B = \{P_1(X), P_2(X), P_3(X)\}$ is a basis of $\mathbb{P}_2[X]$*
2. *Find the coordinates of the vector $P_4(X)$ in this base.*

Série de TD 01
Les espaces vectoriels

Exercice 1 *Déterminer lesquels des ensembles* $E_1; E_2$ *et* E_3 *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$

a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$

b) $E_2 = \{(x + y + z, x - y, z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$

c) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; e^x e^y e^z = 0\}$

Exercice 2 *Soit* $F = \{f/f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ *l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de* F *:*

a) $F_1 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(1) = 0\}$

b) $F_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f \ \ \text{est positive}\}$

c) $F_3 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f \ \ \text{est croissante}\}$

Exercice 3

1. *Montrer que la famille* $B = \{(1, 2); (-1, 1)\}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^2$
2. *Quelle sont les familles libre parmi les familles suivantes :*
   a) $F_1 = \{(1, 1, 0); (1, 0, 0); (0, 1, 1)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$
   b) $F_2 = \{(0, 1, 1, 0); (1, 1, 1, 0); (2, 1, 1, 0)\}$ *dans* $\mathbb{R}^4$
3. *Montrer que la famille* $B = \{(1, 2); (-1, 1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$ *et que la famille* $F_1 = \{(1, 1, 0); (1, 0, 0); (0, 1, 1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$
4. *Déterminer les coordonnées du vecteur* $v = (-3, 1)$ *dans la base* B*.*

Exercice 4 *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$ *définis par :*
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$ *et* $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 2z = 0\}$

1. *Donner une base de* F*, une base de* G*, en déduire leur dimension respective.*
2. *Donner une base de* $F \cap G$*, et donner sa dimension.*
3. *A-t-on* $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ *?*

Exercice 5 *On considère dans* $\mathbb{R}^3$*, le sous ensemble* F *défini par :*

$$F = \{(x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

1. *Montrer que* F *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*.*
2. *Donner une base de* F*, quelle est sa dimension ?*
3. F *est-il égale à* $\mathbb{R}^3$

Exercice 6 *Soient* $\mathbb{P}_2[X]$ *l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients dans* $\mathbb{R}$
$P_1(X) = 1, P_2(X) = X - 1, P_3(X) = X^2, P_4(X) = X(X - 1)$ *des éléments de* $\mathbb{P}_2[X]$

1. *Montrer que* $B = \{P_1(X), P_2(X), P_3(X)\}$ *est une base de* $\mathbb{P}_2[X]$
2. *déterminer les coordonnées du vecteur* $P_4(X)$ *dans cette base.*

Corrigé Série de TD 01

Corrigé exercice 1 *Déterminons lesquels des ensembles* $E_1; E_2$ *et* E_3 *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$ *:*

a) $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x+y-z=0\}$ E_1 *est un s.e.v de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si :*

$$\begin{cases} E_1 \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad 0_{\mathbb{R}^3} \in E_1 \\ \forall u,v \in E_1, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : \lambda u + \beta v \in E_1 \end{cases}$$

— $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in E_1$ *car :* $2(0)+0-0=0$ *donc* $E_1 \neq \emptyset$

— $\forall u,v \in E_1, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ *montrons que :* $\lambda u + \beta v \in E_1$

On a : $u=(x,y,z) \in E_1 \Leftrightarrow 2x+y-z=0, \quad v=(x',y',z') \in E_1 \Leftrightarrow 2x'+y'-z'=0$

et : $\lambda u + \beta v = \lambda(x,y,z)+\beta(x',y',z') = (\lambda x+\beta x', \lambda y+\beta y', \lambda z+\beta z')$

Donc :

$$\begin{aligned} 2(\lambda x+\beta x')+(\lambda y+\beta y')-(\lambda z+\beta z') &= \lambda(2x+y-z)+\beta(2x'+y'-z') \\ &= \lambda(0)+\beta(0)=0 \end{aligned}$$

Donc : $\lambda u + \beta v \in E_1$.

En déduit que E_1 *est un s.e.v de* $\mathbb{R}^3$.

b) $E_2 = \{(x+y+z, x-y, z)/x,y,z \in \mathbb{R}\}$

— $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in E_2$ *car :* $(0,0,0)=(0+0+0, 0-0, 0)$ *donc* $E_2 \neq \emptyset$

— $\forall u,v \in E_2, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ *montrons que :* $\lambda u + \beta v \in E_2$

On a : $u=(x,y,z) \in E_2 \Leftrightarrow u=(x+y+z, x-y, z)$

$v=(x',y',z') \in E_2 \Leftrightarrow v=(x'+y'+z', x'-y', z')$

et : $\lambda u + \beta v = \lambda(x+y+z, x-y, z)+\beta(x',y',z')$

$= (\lambda x+\lambda y+\lambda z+\beta x'+\beta y'+\beta z', \lambda x-\lambda y+\beta x'-\beta y', \lambda z+\beta z')$

$= ((\lambda x+\beta x')+(\lambda y+\beta y')+(\lambda z+\beta z'), (\lambda x+\beta x')-(\lambda y+\beta y'), \lambda z+\beta z')$

d'où $\exists x" = \lambda x+\beta x' \in \mathbb{R}, \quad \exists y" = \lambda y+\beta y' \in \mathbb{R}, \quad \exists z" = \lambda z+\beta z' \in \mathbb{R}$

ainsi : $\lambda u + \beta v = (x"+y"+z", x"-y", z") \in E_2$

En déduit que E_2 *est un s.e.v de* $\mathbb{R}^3$.

c) $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; e^x e^y e^z = 0\}$

On a : $0_{\mathbb{R}_3} = (0,0,0) \notin E_2 car : \exp^0 \times \exp^0 \times \exp^0 = 1 \neq 0$

Donc : E_2 *n'est pas un s.e.v de* $\mathbb{R}^3$.

Corrigé exercice 2 *Soit* $F = \{f/f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ *l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels de* F *:*

a) $F_1 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(1)=0\}$

— $f(x)=0 \in F_1$ *car* $f(1)=0$ *donc* $F_1 \neq \emptyset$

— $\forall f_1, f_2 \in F_1, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ *montrons que :* $\lambda f_1 + \beta f_2 \in F_1$

On a : $f_1 \in F_1 \Leftrightarrow f_1(1)=0, \quad f_2 \in F_1 \Leftrightarrow f_2(1)=0$

Alors : $(\lambda f_1+\beta f_2)(1) = \lambda f_1(1)+\beta f_2(1) = \lambda(0)+\beta(0)=0$

Donc : $\lambda f_1 + \beta f_2 \in F_1$.

En déduit que : F_1 *est un s.e.v de* F.

b) $F_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ est positive}\}$

Si, en prend : $f(x)=x^2+1 \in F_2$ *pour* $\lambda=-1$

on a : $\lambda f(x) = -x^2-1 \notin F_2$.

Donc : F_2 *n'est pas un s.e.v de* F.

c) $F_3 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f \quad est\ croissante\}$
Si,on prend : $f(x) = 3x + 2 \in F_3$ *pour* $\lambda = -1$
on a : $\lambda f(x) = -3x - 2 \notin F_3$
Donc : F_3 *n'est pas un s.e.v de* F.

Corrigé exercice 3 1. *Montrons que la famille* $B = \{(1,2);(-1,1)\}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^2$ *:*
La famille $\{(1,2),(-1,1)\}$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^2$ *si et seulement si :*
$\forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ *tel que :* $u = \lambda(1,2) + \beta(-1,1)$
Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ *, cherchons* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ *tel que :* $(x,y) = \lambda(1,2) + \beta(-1,1)$

$$\begin{cases} x = \lambda - \beta \\ y = 2\lambda + \beta \end{cases} \Longrightarrow x + y = 3\lambda \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x+y}{3} \in \mathbb{R} \\ \beta = \frac{-2x+y}{3} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'où B *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$

2. *Les familles libre parmi les familles suivantes :*

a) $F_1 = \{(1,1,0);(1,0,0);(0,1,1)\}$
F_1 *est une famille libre si et seulement si :*
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(1,0,0) + \lambda_3(0,1,1) = (0,0,0) \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\text{On a : } \lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(1,0,0)+\lambda_3(0,1,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc : F_1 *est libre .*

b) $F_2 = \{(0,1,1,0);(1,1,1,0);(2,1,1,0)\}$
F_2 *est libre si et seulement si :*
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1(0,1,1,0) + \lambda_2(1,1,1,0) + \lambda_3(2,1,1,0) = (0,0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\text{On a : } \lambda_1(0,1,1,0)+\lambda_2(1,1,1,0)+\lambda_3(2,1,1,0) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

Alors : F_2 *est liée .*

3. **a)** *Montrons que la famille* $B = \{(1,2);(-1,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$
$B = \{(1,2),(-1,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$ *car :*
— $dim(\mathbb{R}^2) = card(B) = 2$
— *Il suffit de montrer qu'elle est soit génératrice ou bien libre, et d'après la question* ***(1)*** *elle est génératrice.*
En déduit que : B *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

b) *Montrons que la famille*
$F_1 = \{(1,1,0);(1,0,0);(0,1,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$
F_1 *est base de* $\mathbb{R}^3$ *:*
— $dim(\mathbb{R}^3) = card(F_1) = 3$
— *D'après le question* ***(2.b)*** *on a :* F_1 *est libre .*
En déduit que : F_1 *est une base de* $mathbbR^3$.

4. *Déterminons les coordonnées du vecteur* $v = (-3,1)$ *dans la base* B *:* $v(-3,1) \in \mathbb{R}, \exists \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ *tel que :* $v(-3,1) = \lambda(1,2) + \beta(-1,1)$

$$\begin{cases} \lambda - \beta = -3 \\ 2\lambda + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = -2/3 \quad et \quad \beta = 7/3$$

Corrigé exercice 4 *Soient :* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$ *et* $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 2z = 0\}$

1. *Donnons une base de* F*, une base de* G *:*

   a) *Base de* F *:*

$$\begin{aligned} F &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x - 2y + z = 0\big\} \\ &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad z = 2y - x\big\} \\ &= \{(x, y, 2y - x) \quad / \quad x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, 1) \quad / \quad x, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

   Donc : $B_1 = \{(1, 0, -1); (0, 1, 1)\}$ *est famille génératrice de* F *et elle est libre donc :* B_1 *est une base de* F*, de plus :* $\dim F = 2$

   b) *Base de* G *:*

$$\begin{aligned} G &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad 2x - y + 2z = 0\big\} \\ &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad y = 2x + 2z\big\} \\ &= \{(x, 2x + 2z, z) \quad / \quad x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 2, 0) + z(0, 2, 1) \quad / \quad x, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

   Donc : $B_2 = \{(1, 2, 0); (0, 2, 1)\}$ *est famille génératrice de* G *et elle est libre donc :* B_2 *est une base de* G*, de plus :* $\dim G = 2$

2. *Donnons une base de* $F \cap G$ *:*
   $(x, y, z) \in F \cap G \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \quad et \quad z = -x$
   Donc :

$$\begin{aligned} F \cap G &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0 \quad et \quad z = -x\big\} \\ &= \{(x, 0, -x) \quad / \quad x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, -1) \quad / \quad x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

   Donc : $B_3 = \{(1, 0, -1)\}$ *est une base de* $F \cap G$*, de plus :* $\dim(F \cap G) = 1$.

3. F *et* G *sont supplémentaires si et seulement si :* $\begin{cases} F + G = \mathbb{R}^3 \\ F \cap G = \emptyset \end{cases}$
   Comme $F \cap G \neq 0_{\mathbb{R}^3}$*, alors* F *et* G *ne sont pas supplémentaires.*

Corrigé exercice 5 *Soit :*

$$F = \{(x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

1. *Montrons que* F *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *:* F *est un s.e.v de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si :*

$$\begin{cases} F \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad 0_{\mathbb{R}^3} \in F \\ \forall u, v \in F, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : \lambda u + \beta v \in F \end{cases}$$

   — $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$ *car :* $(0, 0, 0) = (0 - 0, 2(0) + 0 + 4(0), 3(0) + 2(0))$ *donc* $F \neq \emptyset$
   — $\forall u, v \in F, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ *montrons que :* $\lambda u + \beta v \in F$
   On a : $u \in F \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *tel que :* $u = (x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z)$
   de même : $v \in F \Leftrightarrow \exists (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ *tel que :* $v = (x' - y', 2x' + y' + 4z', 3y' + 2z')$
   $\lambda u + \beta v = (\lambda x - \lambda y, 2\lambda x + \lambda y + 4\lambda z, 3\lambda y + 2\lambda z) + (\beta x' - \beta y', 2\beta x' + \beta y' + 4\beta z', 3\beta y' + 2\beta z')$
   $= ((\lambda x + \beta x') - (\lambda y + \beta y'), 2(\lambda x + \beta x') + (\lambda y + \beta y') + 4(\lambda z + \beta z'), 3(\lambda y + \beta y') + 2(\lambda z + \beta z'))$
   D'où : $\exists x'' = \lambda x + \beta x', \quad \exists y'' = \lambda y + \beta y' \quad et \quad \exists z'' = \lambda z + \beta z'$
   ainsi : $\lambda u + \beta v = (x'' - y'', 2x'' + y'' + 4z'', 3y'' + 2z'') \in F$
   En déduit que F *est un s.e.v de* $\mathbb{R}^3$.

2. *Déterminons une base de F :*

$$\begin{aligned} F &= \{(x-y, 2x+y+4z, 3y+2z)/x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,2x,0)+(-y,y,3y)+(0,4z,2z) \quad / \quad x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,2,0)+y(-1,1,3)+z(0,4,2) \quad / \quad x,y,z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

D'où : F est engendré par la famille $B = \{v_1 = (1,2,0), v_2 = (-1,1,3), v_3 = (0,4,2)\}$.
Montrons que B est libre : B est une famille libre si et seulement si :
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
On a : $\lambda_1(1,2,0) + \lambda_2(-1,1,3) + \lambda_3(0,4,2) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 = -2\lambda_3 \end{cases} \Rightarrow 2\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
Donc : B est libre .
En déduit que :B est une base de F, de plus : $\dim F = 3$

3. $F = \mathbb{R}^3$ *car :* $\dim F = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Corrigé exercice 6 *Soient $\mathbb{P}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$*
$P_1(X) = 1, P_2(X) = X - 1, P_3(X) = X^2, P_4(X) = X(X-1)$ *des éléments de $\mathbb{P}_2[X]$*

1. *Montrons que $B = \{P_1(X), P_2(X), P_3(X)\}$ est une base de $\mathbb{P}_2[X]$:*
Comme $card(B) = 3 = \dim \mathbb{P}_2[X]$, alors il suffit de montrer que B est libre pour que B soit une base de $\mathbb{P}_2[X]$
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2(X-1) + \lambda_3\left(X^2\right) = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_2 X + \lambda_3 X^2 = 0$
$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
D'où : B est libre et alors B est une base de $\mathbb{P}_2[X]$.

2. *déterminons les coordonnées du vecteur $P_4(X)$ dans cette base :*

$$P_4(X) = P_3(X) - 2P_2(X) - 2P_1(X)$$

Alors les coordonnées du $P_4(X)$ dans B sont : $-2, -2, 1$.