Series of Exercises 02
Linear Mappings

exercice 1 *Determine whether the following functions f_i are linear :*

$f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y, z) \longrightarrow f_1(x, y, z) = x + 2y + z$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \longrightarrow f_2(x, y) = (2x + y, x - y)$

$f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y, z) \longrightarrow f_3(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$

$f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x, y) \longrightarrow f_4(x, y) = (xy, x, y)$

exercice 2 *For the following linear mappings, determine* $\ker f_i$ *and* Imf_i*. From this, deduce whether f_i is injective, surjective, or bijective.*

- $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_1(x, y) = (x + y, x - y)$
- $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f_2(x, y) = (x + y, x - 2y, 3x + y)$
- $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_3(x, y, z) = (2x + 3y, y + 2z)$
- $f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f_4(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$

exercice 3 *Let f be function defined from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}^3$ by :*

$$f(x, y, z) = (2x + y, y - z, x - y)$$

1. *Show that f is a linear map.*
2. *Find* $\ker f$ *and Imf, and determine their dimensions. Is f bijective ?*
3. *Determine $f \circ f$*

exercice 4 *let $E = \mathbb{R}_4[X]$ be the vector space of real-coefficient polynomials of degree less than or equal to 4 and the function $f : E \longrightarrow E$ defined by : $f(P) = P - P'$*

1. *Show that f is a linear map.*
2. *Is the function f injective ? Surjective ?*

exercice 5 *We denote $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ The canonical basis of $\mathbb{R}^3$ and f the endomorphism in $\mathbb{R}^3$ defined by :*

$$f(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \qquad f(e_2) = 3e_2, \qquad f(e_3) = -4e_1 + 4e_3$$

1. *Let $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculate $f(u)$*
2. *Determine a basis of* $\ker f$.
3. *Is f injective ? can it be surjective ? For what ?*
4. *Determine a basis of Imf. Deduce the rank of f.*
5. *Show that $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus Imf$*

exercice 6 *Let f be function defined from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}^4$ by :*

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$$

1. *Calculate images by f of canonical basis vectors (e_1, e_2, e_3) of $\mathbb{R}^3$. Deduce a basis of Imf and the rank of f.*
2. *Determine a basis of* $\ker f$.
3. *Is the function f injective ? surjective ?*

Série de TD 02
Les applications linéaires

Exercice 1 *Déterminer si les applications f_i suivantes sont linéaires :*

$f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y,z) \longrightarrow f_1(x,y,z) = x + 2y + z$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longrightarrow f_2(x,y) = (2x + y, x - y)$

$f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \longrightarrow f_3(x,y,z) = (x + y, y + z, x - z)$

$f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y) \longrightarrow f_4(x,y) = (xy, x, y)$

Exercice 2 *Pour les applications linéaires suivantes, déterminer* $\ker f_i$ *et* Imf_i. *En déduire si* f_i *est injective, surjective, bijective.*

- $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad f_1(x,y) = (x + y, x - y)$
- $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\quad f_2(x,y) = (x + y, x - 2y, 3x + y)$
- $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad f_3(x,y,z) = (2x + 3y, y + 2z)$
- $f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\quad f_4(x,y,z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$

Exercice 3 *Soit l'application* f *définie de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *par :*

$$f(x,y,z) = (2x + y, y - z, x - y)$$

1. *Monter que* f *est une application linéaire.*
2. *Déterminer* $\ker f$ *et* Imf *et donner leurs dimensions,* f *est-elle bijectives ?*
3. *Déterminer* $f \circ f$

Exercice 4 *Soit* $E = \mathbb{R}_4[X]$ *l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à* 4 *et l'application* $f : E \longrightarrow E$ *définie par :* $f(P) = P - P'$

1. *Montrer que* f *est une application linéaire.*
2. *L'application* f *est-elle injective ? surjective ?*

Exercice 5 *On note* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *défini par :*

$$f(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \qquad f(e_2) = 3e_2, \qquad f(e_3) = -4e_1 + 4e_3$$

1. *Soit* $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *Calculer* $f(u)$
2. *Déterminer une base de* $\ker f$.
3. f *est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?*
4. *Déterminer une base de* Imf. *Déduire le rang de* f.
5. *Montrer que* $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus Imf$

Exercice 6 *Soit l'application linéaire* f *définie de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^4$ *par :*

$$f(x,y,z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$$

1. *Calculer les images par* f *des vecteurs de la base canonique* (e_1, e_2, e_3) *de* $\mathbb{R}^3$ *. En déduire une base de* Imf *et le rang de* f.
2. *Déterminer une base de* $\ker f$.
3. *L'application* f *est-elle injective ?surjective ?*

Corrigé Série 2

Corrigé exercice 1 *Déterminons si les applications f_i suivantes sont linéaires :*
$f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire ssi : $\forall u, v \in E, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : f(\lambda u+\beta v) = \lambda f(u)+\beta f(v)$

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_1(x, y, z) = x + 2y + z$ *$f_1$application linéaire* : $\forall u, v \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$:
   $f_1(\lambda u + \beta v) = \lambda f_1(u) + \beta f_1(v)$
   $u \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow u = (x, y, z) \Rightarrow f_1(u) = f(x, y, z) = x + 2y + z$
   $v \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow v = (x', y', z') \Rightarrow f_1(v) = f(x', y', z') = x' + 2y' + z'$
   on a : $\lambda u + \beta v = \lambda(x, y, z) + \beta(x', y', z') = (\lambda x + \beta x', \lambda y + \beta y', \lambda z + \beta z')$
   alors :
   $$\begin{aligned} f_1(\lambda u + \beta v) &= f_1(\lambda x + \beta x', \lambda y + \beta y', \lambda z + \beta z') = (\lambda x + \beta x') + 2(\lambda y + \beta y') + (\lambda z + \beta z') \\ &= \lambda(x + 2y + z) + \beta(x' + 2y' + z') \\ &= \lambda f_1(u) + \beta f_1(v) \end{aligned}$$
   donc : f_1 *est une A.L*
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f_2(x, y) = (2x + y, x - y)$
   f_2 *application linéaire :* $\forall u, v \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : f_2(\lambda u + \beta v) = \lambda f_2(u) + \beta f_2(v)$
   $u \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow u = (x, y) \Rightarrow f_2(u) = f_2(x, y) = (2x + y, x - y)$
   $v \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow v = (x', y') \Rightarrow f_2(v) = f_2(x', y') = (2x' + y', x' - y')$
   $$\begin{aligned} f_2(\lambda u + \beta v) &= f_2(\lambda(x, y) + \beta(x', y')) = f_2(\lambda x + \beta x', \lambda y + \beta y') \\ &= (2\lambda x + 2\beta x' + \lambda y + \beta y', \lambda x + \beta x' - \lambda y - \beta y') \\ &= (2\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y) + (2\beta x' + \beta y', \beta x' - \beta y') \\ &= \lambda(2x + y, x - y) + \beta(2x' + y', x' - y') \\ &= \lambda f_2(u) + \beta f_2(v) \end{aligned}$$
   donc : f_2 *est une A.L*
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f_3(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$
   f_3 *A.L :* $\quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : f_3(\lambda u + \beta v) = \lambda f_3(u) + \beta f_3(v)$
   $$\begin{aligned} f_3(\lambda u + \beta v) &= f_3(\lambda(x, y, z) + \beta(x', y', z')) = f_3(\lambda x + \beta x', \lambda y + \beta y', \lambda z + \beta z') \\ &= (\lambda x + \beta x' + \lambda y + \beta y', \lambda y + \beta y' + \lambda z + \beta z', \lambda x + \beta x' - \lambda z - \beta z') \\ &= (\lambda x + \lambda y, \lambda y + \lambda z, \lambda x - \lambda z) + (\beta x' + \beta y', \beta y' + \beta z', \beta x' - \beta z') \\ &= \lambda(x + y, y + z, x - z) + \beta(x' + y', y' + z', x' - z') \\ &= \lambda f_3(u) + \beta f_3(v) \end{aligned}$$
   donc : f_3 *est une A.L*
4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f_4(x, y) = (xy, x, y)$
   Si on prend $u = (1, 1)$ *et* $v(2, 2)$ *on a :*
   $f_4(u + v) = f_4(3, 3) = (9, 3, 3)$
   d'autre part :
   $f_4(u) + f_4(v) = (1, 1, 1) + (4, 2, 2) \quad = (5, 3, 3)$
   donc :$f_4(u + v) \neq f(u) + f(v)$
   $\Rightarrow f_4$ *n'est pas une A.L*

Corrigé exercice 2 *déterminons* $\ker f_i$ *et* Imf_i *:*

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f_1(x,y) = (x+y, x-y)$

1.a) *Calculons le noyau*

$$\begin{aligned} \ker f_1 &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; / \;\; f_1(x,y) = (0,0)\big\} \\ &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; / \;\; (x+y, x-y) = (0,0)\big\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y=0 \end{array} \right. \Rightarrow (x,y) = (0,0) \end{aligned}$$

donc : $\ker f_1 = \{(0,0)\} \Rightarrow f_1$ *est injective.*

1.b) *Calculons l'image :*

$$\begin{aligned} Imf_1 &= \big\{f_1(x,y) \;\; / \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\} \\ &= \big\{(x+y, x-y) \;\; / \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\} \\ &= \big\{(x,x) + (y,-y) \;\; / \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\} \\ &= \big\{x(1,1) + y(1,-1) \;\; / \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\} \\ Imf_1 &= vect\,\{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1)\} \end{aligned}$$

Ainsi Imf_1 *est un s.e.v de* $\mathbb{R}^2$ *engendré par* $\{v_1, v_2\}$ *qui sont libre, alors* $\{v_1, v_2\}$ *est une base de* Imf_1
donc : $\dim(Imf_1) = 2$ *et on déduit :* $\dim(Imf_1) = 2 = dim\mathbb{R}^2$
c-à-d : $Imf_1 = \mathbb{R}^2 \Rightarrow f_1$ *est surjective* $\Rightarrow f_1$ *est bijective.*

2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f_2(x,y) = (x+y, x-2y, 3x+y)$

2.a) *Calculons le noyau :*

$$\begin{aligned} \ker f_2 &= \{(x,y) \;\; / \;\; f_2(x,y) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y) \;\; / \;\; (x+y, x-2y, 3x+y) = (0,0,0)\} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=0 \\ x-2y=0 \\ 3x+y=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=-x \\ x=0 \\ y=0 \end{array} \right. \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

$\ker f_2 = \{(0,0)\} \quad \Rightarrow f_2$ *est injective.*

2.b) *Calculons l'image :*

$$\begin{aligned} Imf_2 &= \big\{f(x,y) \;\; / \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\} \\ &= \big\{(x+y, x-2y, 3x+y) \;\; / \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\} \\ &= \big\{(x,x,3x) + (y,-2y,y) \;\; / \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\} \\ &= \big\{x(1,1,3) + y(1,-2,1) \;\; / \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\} \\ Imf_2 &= Vect\,\{v_1(1,1,3), v_2 = (1,-2,1)\} \end{aligned}$$

Ainsi Imf_2 *est un s.e.v de* $\mathbb{R}^3$ *engendré par* $\{v_1, v_2\}$ *qui sont libre,alors* $\{v_1, v_2\}$ *est une base de* Imf_2
on déduit que $\dim(Imf_2) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3)$ *donc :* $\mathbb{R}^3 \neq Imf_2 \Rightarrow f_2$ *n'est pas surjective.*
donc : f_2 *n'est bijective.*

3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f_3(x,y,z) = (2x+3y, y+2z)$

3.a) *calculons le noyau :*

$$\begin{aligned} \ker f_3 &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\; / \;\; f_3(x,y,z) = (0,0)\big\} \\ &\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\; / \;\; (2x+3y, y+2z) = (0,0)\big\} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=-3y=6z \\ y=-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3z \\ y=-2z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \ker f_3 &= \{(3z,-2z,z) \ / \ z\in\mathbb{R}\} \\ &= \{z(3,-2,1) \ / \ z\in\mathbb{R}\} \\ &= Vect\{(3,-2,1)\} \end{aligned}$$

Ainsi $\ker f_3$ *est un s.e.v de* $\mathbb{R}^3$ *engendré par* $\{(3,-2,1)\}$
donc : f_3 *n'est pas injective*

3.b) *Calculons l'image :*

$$\begin{aligned} Imf_3 &= \left\{f_3(x,y,z) \ / \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{(2x+3y,y+2z) \ / \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{(2x,0)+(3y,y)(0,2z) \ / \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{x(2,0)+y(3,1)+z(0,2) \ / \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ Imf_3 &= Vect\{v_1=(2,0),v_2(3,1),v_3=(0,2)\} \end{aligned}$$

Ainsi :Imf_3 *est un s.e.v de* $\mathbb{R}^2$ *engendré par* $\{v_1,v_2,v_3\}$ *mais la famille* $\{v_1,v_2,v_3\}$ *est liée car :*

$$\forall\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R} : \lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1+3\lambda_2=0 \Rightarrow \lambda_2=\frac{-2}{3}\lambda_1 \\ \lambda_2+2\lambda_3=0 \Rightarrow \lambda_2=-2\lambda_3 \end{cases}$$

Donc : $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3\neq 0.$
Dans ce cas,en élimine un vecteur de la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$
alors : $\{v_1,v_2\}$ *sont libre donc :*
la famille $\{v_1,v_2\}$ *est une base de* Imf_3
$\Rightarrow dimImf_3=2=dim\mathbb{R}^2 \Rightarrow f_3$ *est surjective*
$\Rightarrow f_3$ *n'est pas bijective .*

4. $f_4:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3, \qquad f_4(x,y,z)=(2x+y+z,y-z,x+y)$

4.a) *calculons le noyau*

$$\begin{aligned} \ker f_4 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z)=(0,0,0)\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ (2x+y+z,y-z,x+y)=(0,0,0)\right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y-z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=z \\ x=-z \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(-z,z,z)$$

$$\begin{aligned} \ker f_4 &= \{(-z,z,z) \ / \ z\in\mathbb{R}\} \\ &= \{z(-1,1,1) \ / \ z\in\mathbb{R}\} \\ &= Vect\{(-1,1,1)\} \end{aligned}$$

donc : $\ker f_4\neq\{(0,0,0)\} \Rightarrow f_4$ *n'est pas injective.*

4.b) *calculons l'image*

$$\begin{aligned} Imf_4 &= \left\{f_4(x,y,z) \ / \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{(2x+y+z,y-z,x+y) \ / \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{(2x,0,x)+(y,y,y)+(z,-z,0) \ / \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{x(2,0,1)+y(1,1,1)+z(1,-1,0) \ / \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\} \\ &= Vect\{v_1=(2,0,1),v_2=(1,1,1);v_3=(1,-1,0)\} \end{aligned}$$

Imf_4 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ engendré par : $\{v_1, v_2, v_3\}$ mais la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée car : $v_3 = v_1 - v_2$.
Dans ce cas, on élimine un vecteur de la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$
on trouve $\{v_1, v_2\}$ est libre donc : $\{v_1, v_2\}$ est base de $Imf_4 \Rightarrow dim Imf_4 = 2 \neq dim\mathbb{R}^3$
donc : $\mathbb{R}^3 \neq Imf_4 \Rightarrow f_4$ n'est pas surjective.
ce qui implique : f_4 n'est pas bijective.

Corrigé exercice 3 *Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :*

$$f(x, y, z) = (2x + y, y - z, x - y)$$

1. *f est une application linéaire :*
$\forall u(x, y, z), v(x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : f(\lambda u + \beta v) = \lambda f(u) + \beta f(v)$

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \beta v) &= f(\lambda(x, y, z) + \beta(x', y', z')) = f(\lambda x + \beta x', \lambda y + \beta y', \lambda z + \beta z') \\ &= (2\lambda x + 2\beta x' + \lambda y + \beta y', \lambda y + \beta y' - \lambda z - \beta z', \lambda x + \beta x' - \lambda y - \beta y') \\ &= (2\lambda x + \lambda y, \lambda y - \lambda z, \lambda x - \lambda y) + (2\beta x' + \beta y', \beta y' - \beta z', \beta x' - \beta y') \\ &= \lambda(2x + y, y - z, x - y) + \beta(2'x + y', y' - z', x' - y') \\ &= \lambda f(u) + \beta f(v) \end{aligned}$$

donc f est une A L.

2. *Déterminons* $\ker f$ *et Imf :*

$$\begin{aligned} \ker f &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad f(x, y, z) = (0, 0, 0)\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad (2x + y, y - z, x - y) = (0, 0, 0)\right\} \end{aligned}$$

donc :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y = z \\ x = y \end{array}\right. \quad \Rightarrow x = y = z = 0$$

$\ker f = \{(0, 0, 0)\} = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow f$ *est injective et* $\dim(\ker f) = 0$

$$\begin{aligned} Imf &= \left\{f(x, y, z) \quad / \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{(2x + y, y - z, x - y) \quad / \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{(2x, 0, x) + (y, y, -y) + (0, -z, 0) \quad / \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{x(2, 0, 1) + y(1, 1, -1) + z(0, -1, 0) \quad / \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ Imf &= Vect\{v_1 = (2, 0, 1), v_2 = (1, 1, -1), v_3 = (0, -1, 0)\} \end{aligned}$$

Ainsi Imf est s.e.v de $\mathbb{R}^3$ engendré par : $B = \{v_1, v_2, v_3\}$.
B est une famille libre donc B est une base de Imf
en déduit que $\dim(Imf) = card(B) = 3$
donc $\dim(Imf) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3 \Rightarrow Imf = \mathbb{R}^3$
alors : f est surjective. ce qui implique : f est bijective .

3. *Déterminons $f \circ f$*

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x, y, z) &= f(f(x, y, z)) = f(2x + y, y - z, x - y) \\ &= (2(2x + y) + (y - z), (y - z) - (x - y), (2x + y) - (y - z)) \\ &= (4x + 3y - z, -x - z, 2x + z) \end{aligned}$$

Corrigé exercice 4 *Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4 et l'application $f : E \longrightarrow E$ définie par : $f(P) = P - P'$*

1. *Montrons que f est une application linéaire : $\forall P, Q \in E, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : f(\lambda P + \beta Q) = \lambda f(P) + \beta f(Q)$*

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \beta Q) = & \quad (\lambda P + \beta Q) - (\lambda P + \beta Q)' = \lambda P + \beta Q - \lambda P' - \beta Q' \\ & = \lambda P - \lambda P' + \beta Q - \beta Q' = \lambda(P - P') + \beta(Q - Q') \\ & = \lambda f(P) + \beta f(Q) \end{aligned}$$

donc : f est une A.L

2. *L'application f est-elle injective ? surjective ?*

$$\begin{aligned} \ker f &= \{P \in E \quad / \quad f(P) = 0\} \\ &= \{P \in E \quad / \quad P - P' = 0\} \\ &= \{P \in E \quad / \quad P = P' = 0\} = \{0\} \end{aligned}$$

donc $\ker f$ *est égal le polynôme nul.*
donc f est injective . Puisque l'ensemble de départ est égale à l'ensemble d'arrivé avec une dimension finie donc f injective $\Rightarrow$ f est surjective .

Corrigé exercice 5 *soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :$f(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad f(e_2) = 3e_2, \quad f(e_3) = -4e_1 + 4e_3$*

1. *Calculons $f(u)$:*

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow u &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \\ f(u) &= f(u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) \\ &= \lambda_1(-2, 0, 2) + \lambda_2(0, 3, 0) + \lambda_3(-4, 0, 4) \\ &= (-2\lambda_1 - 4\lambda_3, 3\lambda_2, 2\lambda_1 + 4\lambda_3) \end{aligned}$$

d'où : $f(u) = (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z)$

2. *Déterminons une base de* $\ker f$ *:*

$$\begin{aligned} \ker f &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad f(x, y, z) = (0, 0, 0)\big\} \\ &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z) = (0, 0, 0)\big\} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = o \\ x = -2z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(-2z, 0, z) \quad / \quad z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-2, 0, 1) \quad / \quad z \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect\,\{v = (-2, 0, 1)\} \end{aligned}$$

donc : $\ker f$ *est engendré par : $B = \{v\}$.*
On en déduit que B est libre ce qui implique B base de $\ker f$.

3. *f est-il injectif ? peut-il être surjectif ?*
Comme $\ker f \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow f$ *n'est pas injective.*
De plus f est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^3$, elle n'est pas surjective,car on a : f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective.

4. *Déterminons une base de Imf :*
   D'après le théorème du rang : $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker f) + \dim(Imf)$
   $\Rightarrow \dim(Imf) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker f) = 3 - 1 = 2$
   On a :$\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ *est famille génératrice de Imf. Il suffit d'extraire une famille libre à deux élément. On peut vérifie facilement que* $\{f(e_1), f(e_2)\}$ *est une famille libre, donc est une base de Imf et $Rg(f) = 2$.*
5. *Montrons que* $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus Imf$ *:*
   Il suffit de montrer que la réunion d'une base de $\ker f$ *et d'une base de Imf est une base de* $\mathbb{R}^3$ *c-à-d : montrer que* $\{(-2, 0, 1), (-2, 0, 2), (0, 3, 0)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

Remarque :Exo 6 devoir