L1 Informatics
Algebra 2

Badji Mokhtar – Annaba University
Faculty of Technology

Department of Informatics

2023/2024
Dr. Neggal bilel

Series of Exercises 03
The Matrices and Solving Systems of Equations

exercice 1 *Let the matrices :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculate : $A + B, A - B, 2A, -3B, A \times B, A^2, B^t$.

exercice 2 *Calculate the determinant of the following matrices :*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

exercice 3 *Let the matrix :* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Is A invertible ? If yes, determine its inverse A^{-1}.*
2. *Calculate A^2, then find two real numbers α and β,tels que : $A^2 = \alpha A + \beta I_3$ with I_3 is the identity matrix. Deduce A^{-1} again.*

exercice 4 *Let $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ The canonical basis of $\mathbb{R}^3$. We consider an endomorphism of $\mathbb{R}^3$ defined by : $f(x, y, z) = (x-y+z, -x+y+z, 2z)$ et $B' = \{v_1 = (1, 2, 0); v_2 = (-1, 0, -1); v_3 = (0, 1, 0)\}$ a basis of $\mathbb{R}^3$.*

1. *Find the matrix A associated with f in the canonical basis B.*
2. *Find the rank of A.*
3. *Find the transition matrix P from the canonical basis B to the basis B'.*
4. *Find the transition matrix Q from B' to B. What is the relationship between P and Q ?*

exercice 5 *Let the following matrices :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Calculate all possible products of two matrices chosen from the three matrices. Justify your answer*
2. *Let $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ be the endomorphism whose matrix with respect to the canonical basis $\{e_1, e_2\}$ of $\mathbb{R}^2$ is A, Find $f(x, y)$?*

3. *Let* $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *be the endomorphism whose matrix with respect to the canonical basis* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *of* $\mathbb{R}^3$ *is* C*, Find* $g(x, y, z)$ *?*
4. *Determine if the matrices are invertible ?*

exercice 6 *Let the following system of equations :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

1. *Show that this system is a Cramer's system.*
2. *Find the solution of the system (3).*

Université Badji Mokhtar Annaba
Faculté Des Technologies

Département d'Informatique

Série de TD 03
Les matrices et Résolution de systèmes d'équations.

Exercice 1 *Soient les matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculer : $A + B, A - B, 2A, -3B, A \times B, A^2, B^t$.

Exercice 2 *Calculer le déterminant des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *A est elle inversible ? si oui déterminer son inverse* A^{-1}.
2. *Calculer* A^2*, puis trouver deux réels* α *et* β*,tels que :* $A^2 = \alpha A + \beta I_3$
   avec I_3 *est la matrice identité, déduire une autre fois* A^{-1}.

Exercice 4 *Soit* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*. On considère un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *définit par :* $f(x, y, z) = (x-y+z, -x+y+z, 2z)$ *et* $B' = \{v_1 = (1, 2, 0); v_2 = (-1, 0, -1); v_3 = (0, 1, 0)\}$ *une base de* $\mathbb{R}^3$.

1. *Déterminer la matrice* A *associée à* f *dans la base canonique* B.
2. *Déterminer le rang de* A.
3. *Déterminer la matrice de passage* P *de la base canonique* B *à la base* B'.
4. *Déterminer la matrice de passage* Q *de* B' *vers* B*. Quel est le lien entre* P *et* Q *?*

Exercice 5 *On considère les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer tous les produits possibles de deux matrices choisie parmi les trois matrices. Justifier votre réponse.*
2. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *l'endomorphisme dont la matrice par rapport à la base canonique* $\{e_1, e_2\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *est* A*, que vaut* $f(x, y)$ *?*

3. *Soit* $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'endomorphisme dont la matrice par rapport à la base canonique* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *est* C*, que vaut* $g(x, y, z)$ *?*
4. *Déterminer si les matrices sont inversibles ?*

Exercice 6 *Soit le système d'équation suivant :*

$$\left\{\begin{array}{l} x - 3y + 6z = 3 \\ 6x - 8y + 12z = 2 \\ 3x - 3y + 4z = 1 \end{array}\right. \tag{2}$$

1. *Démontrer que ce système est un système de Cramer.*
2. *Trouver la solution du système (3).*

Corrigé Série de TD 03

Corrigé exercice 1 *1. Calcule de $A+B$*

$$A+B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-1&2\\4&3&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2&-4\\1&0&-2\\-2&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2&-5\\4&-1&0\\2&6&10\end{pmatrix}$$

2. *Calcule de $A-B$*
   Calculons d'abord la matrice $-B$

$$-B=\begin{pmatrix}-3&-2&4\\-1&0&2\\2&-3&-3\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-1&2\\4&3&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&-2&4\\-1&0&2\\2&-3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&3\\2&-1&4\\6&0&4\end{pmatrix}$$

3. *Calcule de $2A$*

$$2A=2\times\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-1&2\\4&3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&-2\\6&-2&4\\8&6&14\end{pmatrix}$$

4. *Calcule de $-3B$*

$$-3B=-3\times\begin{pmatrix}3&2&-4\\1&0&-2\\-2&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&-6&12\\-3&0&6\\6&-9&-9\end{pmatrix}$$

5. *Calcule de $A\times B$*

$$A\times B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-1&2\\4&3&7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3&2&-4\\1&0&-2\\-2&3&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\times3+0\times1+(-1)\times(-2) & 2\times2+0\times0+(-1)\times3 & 2\times(-4)+0\times(-2)+(-1)\times3\\ 3\times3+(-1)\times(1)+2\times(-2) & 3\times2+(-1)\times0+2\times(3) & 3\times-4+(-1)\times(-2)+2\times3\\ 4\times3+3\times1+7\times(-2) & 4\times2+3\times0+7\times3 & 4\times(-4)+3\times(-2)+7\times3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8&1&-11\\4&12&-4\\1&29&-1\end{pmatrix}$$

6. *Calcule de A^2*

$$A^2=A\times A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-1&2\\4&3&7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&0&-1\\3&-1&2\\4&3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3&-9\\11&7&9\\45&18&51\end{pmatrix}$$

7. *Calcule de la transposé de B noté B^t*

$$B^t=\begin{pmatrix}3&1&-2\\2&0&3\\-4&-2&3\end{pmatrix}$$

Corrigé exercice 2 *Calculons les déterminons suivants :*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -2 \times 9 - 7 \times 6 = -60$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 6 & -4 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 272$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -14$$

Corrigé exercice 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *A est inversible ssi* $\det(A) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

d'où le résultat.

2. *A^{-1} est donnée par :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$$

où C^t est la comatrice de A

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

avec A_{ij} est la matrice déduite de A par suppression de la ligne i et la colonne j

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

3. — *Calcule de* A^2

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

— *Trouvons* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que :* $A^2 = \alpha A + \beta I_3$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi $\alpha = -2, \beta = 3$.

— *Déduire* A^{-1}

$A^2 = -2A + 3I_3 \Rightarrow A^2 + 2A = 3I_3$

$A(A + 2I_3) = 3I_3 \Rightarrow A(\frac{1}{3}(A + 2I_3)) = I_3$

ainsi $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I_3) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Corrigé exercice 4 *Soit* $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$,
$B' = \{v_1 = (1, 2, 0); v_2 = (-1, 0, -1); v_3 = (0, 1, 0)\}$ *et :*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longrightarrow f(x, y, z) = (x - y + z, -x + y + z, 2z)$$

1. *Déterminans* A *la matrice associe a* f *dans* B *:*

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, -1, 0) = e_1 - e_2$$
$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (-1, 1, 0) = -e_1 + e_2$$
$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (1, 1, 2) = e_1 + e_2 + 2e_3$$

Alors :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. *Rang de* A *: le rang de* A *est l'ordre de plus grande matrice carrée* C *extraite de* A *tel que* $\det(C) \neq 0$

On pose $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *tel que* $\det(C) = 2 \neq 0$

Alors : $rg(A) = 2$

3. *Déterminans la matrice de passage* P *de la Base* B *a la base* B' *:*

$$On\ a : \begin{cases} v_1 = e_1 + 2e_2 \\ v_2 = -e_1 - e_3 \\ v_3 = e_2 \end{cases} \quad d'ou \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. *Déterminans Q la matrice de passage de B' vers B :*

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + 2e_2 \\ v_2 = -e_1 - e_3 \\ v_3 = e_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 + 2v_3 \\ e_2 = v_3 \\ e_3 = -v_1 - v_2 + 2v_3 \end{cases} \quad d'ou \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le lien entre P et Q : on a $Q \times P = I_3$ d'où : $P = Q^{-1}$.

Corrigé exercice 5 *Soit le système :*

$$\begin{cases} x - 3y + 6z = 3 \\ 6x - 8y + 12z = 2 \\ 3x - 3y + 4z = 1 \end{cases} \tag{3}$$

1. *Montrons que (3) est un système de Cramer : Le système (3) s'écrit :*

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le système (3) est de Cramer ssi : $\det A \neq 0$.
On a : $\det A = 4 \neq 0$ donc : (3) est un système de Cramer.

2. *La solution du système (3) par la méthode de Cramer :*

$$x = \frac{1}{\det A} \times \begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & -8 & 12 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

$$y = \frac{1}{\det A} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$z = \frac{1}{\det A} \times \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 6 & -8 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$