L1 Informatics **Algebra 2**	**Badji Mokhtar – Annaba University** **Faculty of Technology** **Department of Informatics**	**2023/2024** **Time : 1h30**

Algebra 2 Exam

Exercice: 1 ***(5 points)***
Let F and G two subsets of $\mathbb{R}^4$ defined by :

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; \quad x = 2y = -z = t\right\}$$
$$G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z - t = 0\right\}$$

1. *Show that F and G are a vector subspaces of $\mathbb{R}^4$.*
2. *Give a basis for F, a basis for G, and deduce their dimensions.*
3. *Show that : $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.*

Exercice: 2 ***(7 points)***
Let the following linear maps :

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = (z, x+y+z) \end{array} \qquad g: \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \longrightarrow g(x,y) = (-y, -x+2y, x) \end{array}$$

1. *Determine a basis of $\ker(f)$, deduce the rank of f and that f is surjective.*
2. **a)** *Show that : g is injective, deduce rank of g.*
   b) *Show that : $\{v_1 = (-1,2,0); v_2 = (0,-1,1)\}$ is a basis of $Im(g)$.*
3. *Show that : $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$.*
4. *Show that : $\ker(g \circ f) = \ker(f)$ and determine $Im(g \circ f)$.*

Exercice: 3 ***(8 points)***

1. *Let the matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.*
   a. *Calculate $A = I_3 - M$ and $B = I_3 + M + M^2$. let's remember that : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*
   b. *Calculate $A \times B$ and $B \times A$.*
   c. *Deduce that B is invertible and give its inverse B^{-1}.*
2. *Let the following system of equations :*

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 1 \\ -5x - 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases} \tag{1}$$

   a. *Show that this system is a Cramer's system.*
   b. *Find the solution of the system (1) by Cramer's method.*

L1 Informatique
Algèbre 2

Université Badji Mokhtar Annaba
Faculté Des Technologies

Département d'informatique

2023/2024
Durée : 1h30

Examen D'Algèbre 2

Exercice 1 ***(5 points)***
Soient F et G deux sous ensemble de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; \quad x = 2y = -z = t\right\}$$
$$G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z - t = 0\right\}$$

1. *Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.*
2. *Déterminer une base de F, une base de G, en déduire leur dimension respective.*
3. *Montrer que : $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.*

Exercice 2 ***(7 points)***
Soient les application linéaires suivantes :

$$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) \longrightarrow f(x, y, z) = (z, x + y + z) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} g: & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) \longrightarrow g(x, y) = (-y, -x + 2y, x) \end{array}$$

1. *Déterminer une base de $\ker(f)$, en déduire $Rg(f)$ et que f est surjective.*
2. **a)** *Montrer que g est injective, en déduire $Rg(g)$.*
   b) *Montrer que : $\{v_1 = (-1, 2, 0); v_2 = (0, -1, 1)\}$ est une base de $Im(g)$.*
3. *Montrer que : $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$.*
4. *Montrer que : $\ker(g \circ f) = \ker(f)$ et déterminer $Im(g \circ f)$.*

Exercice 3 ***(8 points)***

1. *Soit la matrice* $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   a. *Calculer $A = I_3 - M$ et $B = I_3 + M + M^2$. Rappelons que :* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   b. *Calculer $A \times B$ et $B \times A$.*

   c. *En déduire que B est inversible et donner son inverse B^{-1}.*

2. *Soit le système d'équation suivant :*

$$\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y + z = 1 \\ -5x - 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \end{array}\right. \qquad \text{(S)}$$

   a. *Montrer que ce système est un système de Cramer.*

   b. *Trouver la solution du système (S) par la méthode de Cramer.*

Corrigé de l'examen d'algèbre 2

Exo 01 $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 ;\ x=2y=-z=t\}$

$G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^3,\ x+y-z-t=0\}$

1) Montrons que F et G sont des s.e.v de $\mathbb{R}^4$:

a) F est un s.e.v de $\mathbb{R}^4$ ssi : $\begin{cases} F\neq\emptyset \\ \forall u,v\in F, \forall\lambda,\beta\in\mathbb{R} : \lambda u+\beta v\in F \end{cases}$ 0,25

i) $F\neq\emptyset$ car : $(0,0,0,0)\in F$ 0,25

ii) $\forall u,v\in F, \forall\lambda,\beta\in\mathbb{R} :\ \lambda u+\beta v\in F$

$u\in F \Leftrightarrow u=(x,y,z,t) :\ x=2y=-z=t$

$v\in F \Leftrightarrow v=(x',y',z',t') :\ x'=2y'=-z'=t'$

0,25

donc : $\lambda u+\beta v=\lambda(x,y,z,t)+\beta(x',y',z',t')=(\lambda x+\beta x', \lambda y+\beta y', \lambda z+\beta z', \lambda t+\beta t')$

0,25

Vérifions les conditions : on a $\lambda x+\beta x'=\lambda(2y)+\beta(2y')=2(\lambda y+\beta y')$

0,25

et $\lambda x+\beta x'=\lambda(-z)+\beta(-z')=-(\lambda z+\beta z')$

0,25

et $\lambda x+\beta x'=\lambda(t)+\beta(t')=(\lambda t+\beta t')$

donc : $(\lambda u+\beta v)\in F$, enfin F est un s.e.v de $\mathbb{R}^4$

b) i) $G\neq\emptyset$ car : $(0,0,0,0)\in G$ 0,25

ii) $\forall u,v\in G, \forall\lambda,\beta\in\mathbb{R} :\ \lambda u+\beta v\in G$ 0,25

$u\in G \Leftrightarrow u=(x,y,z,t) :\ x+y-z-t=0$

$v\in G \Leftrightarrow v=(x',y',z',t') :\ x'+y'-z'-t'=0$

donc : $\lambda u+\beta v=\lambda(x,y,z,t)+\beta(x',y',z',t')=(\lambda x+\beta x', \lambda y+\beta y', \lambda z+\beta z', \lambda t+\beta t')$

0,25

Vérifions la condition : on a : $(\lambda x+\beta x')+(\lambda y+\beta y')-(\lambda z+\beta z')-(\lambda t+\beta t')=$

$\lambda(x+y-z-t)+\beta(x'+y'-z'-t')=\lambda(0)+\beta(0)=$

0,25

donc : $(\lambda u+\beta v)\in G$, enfin G est un s.e.v de $\mathbb{R}^4$

2) a) Déterminons une base de F et sa dimension :

$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x = 2y = -z = t\} = \{(2y, y, -2y, 2y) \in \mathbb{R}^4, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{y(2,1,-2,2) \in \mathbb{R}^4, y \in \mathbb{R}\}$ 0,5

donc : $\forall u \in F \Leftrightarrow u = y(2,1,-2,2) = y\,v_1$ donc : $\{v_1\}$ est une famille génératrice 0,25 et libre donc une base de F et

$\boxed{\dim F = 1}$ 0,25

b) $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y-z-t=0\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x = -y+z+t\}$

$= \{(-y+z+t, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\}$

$= \{y(-1,1,0,0) + z(1,0,1,0) + t(1,0,0,1)\}$ 0,5

donc : $\forall u \in G \Leftrightarrow u = y(-1,1,0,0) + z(1,0,1,0) + t(1,0,0,1)$

$= y\,w_1 + z\,w_2 + t\,w_3$

On conclue que : $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une famille génératrice de G et on peut vérifier facilement qu'ils sont libre 0,25

donc : $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de G et $\boxed{\dim G = 3}$

0,25

3) On a : $\dim \mathbb{R}^4 = \dim F + \dim G \Leftrightarrow 4 = 1+3$ donc :

$\mathbb{R}^4 = F \oplus G$

Exo 02 : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (z, x+y+z)$.

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto g(x,y) = (-y, -x+2y, x)$

1) Déterminons une base de $Ker(f)$ et le $Rg(f)$

- $Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } f(x,y,z) = (0,0)\}$ 0,25

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } (z, x+y+z) = (0,0)\}$

donc : $\begin{cases} z = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases}$ 0,25

d'où $Ker(f) = \{(x,-x,0), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-1,0), x \in \mathbb{R}\}$

$= Vect\{u_1 = (1,-1,0)\}$

donc : $Ker(f)$ est engendré par $\{u_1 = (1,-1,0)\}$ qui est libre

enfin : $\{u_1 = (1,-1,0)\}$ est une base de $Ker(f)$ et 0,5

$\dim Ker(f) = 1$

- On a : $\dim \mathbb{R}^3 = \dim Ker(f) + \dim Im(f) = \dim Ker(f) + Rg(f)$

donc : $Rg(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Ker(f) = 3 - 1 = 2$ 0,5

d'où : $Rg(f) = 2$

- On a : $Rg(f) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ donc : $Im(f) = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f$ est surjective. 0,5

2) a) Montrons que g est injective, et déduire $Rg(g)$

On a : $Ker(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (-y, -x+2y, x) = (0,0,0)\}$ 0,5

$= \{(0,0)\}$ d'où g est injective.

$Rg(g) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim Ker(g) = 2 \Rightarrow Rg(g) = 2$ 0,5

b) Montrons que $\{ v_1 = (-1,2,0) \, ; \, v_2 = (0,-1,1) \}$ est une base de $Im(g)$

- $\{v_1, v_2\}$ libre ssi : $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\lambda_1(-1,2,0) + \lambda_2(0,-1,1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 0} \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

0,5

donc : $\{v_1, v_2\}$ est libre.

- On a : $\begin{cases} g(0,1) = v_1 \\ \text{et} \\ g(1,0) = v_2 \end{cases} \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ est une famille génératrice

0,5

donc : $\{v_1, v_2\}$ est une base de $Im(g)$

3) Montrons que : $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$

On a : $f \circ g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(-y, -x+2y, x)$

$= (x, y)$

1

d'où : $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$

4) - Montrons que : $Ker(g \circ f) = Ker(f)$

$g \circ f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \, (g \circ f)(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = (-x-y-z, 2x+2y+z, z)$

$Ker(g \circ f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \, (-x-y-z, 2x+2y+z, z) = (0,0,0) \}$

$= \{ (x, -x, 0) \, , \, x \in \mathbb{R} \}$

1

$= \{ x(1,-1,0) \, , \, x \in \mathbb{R} \} = Ker(f)$

- $Im(g \circ f) = \{ (-x-y-z, 2x+2y+z, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, x,y,z \in \mathbb{R} \}$

1

$= \{ x(-1,2,0) + y(-1,2,0) + z(-1,1,1) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, x,y,z \in \mathbb{R} \}$

$= vect\{w_1 = (-1,2,0) \, ; \, w_2 = (-1,1,1)\}$ s.e.v de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{w_1, w$

Exo 03 : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1) a) Calculons : $A = I_3 - M$ et $B = I_3 + M + M^2$ 0,5

$$A = I_3 - M = I_3 + (-M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$B = I_3 + M + M^2$

calculons M^2 :

$$M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ 0,5

donc :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

0,5

b) Calculons $A \times B$ et $B \times A$:

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 0,5

et

$$B \times A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 0,5

c) Déduction que B est inversible et donnons son inverse

On a : $A \times B = B \times A = I_3$ 0,5

donc B est inversible et son inverse :

$$B^{-1} = A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ 0,5

2) $\begin{cases} 4x+2y+z=1 \\ -5x-2y-z=2 \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}$ (1)

a) Montrons que (1) est un système de Cramer :

- L'écriture matricielle de (1) est :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow BX = C$$ 0,5

avec : $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

- On a : $\det(B) = 4\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

donc : $\det(B) = 1 \neq 0$ ce qui implique : 1
(1) est un système de Cramer.

b) La solution du système (1) par la méthode de Cramer :

$$x = \frac{1}{\det(B)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$ 1

$$y = \frac{1}{\det(B)} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8$$ 1 $\Longrightarrow X = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$z = \frac{1}{\det(B)} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$ 1