Filtrage Numérique

Entrée : $x(n)$ $X(z)$ → Filtre numérique $h(n) \rightarrow H(z)$ → Sortie : $y(n)$ $Y(z)$

Entrée : $x(n)$ $X(z)$ → Filtre numérique RIF → Sortie : $y(n)$ $Y(z)$

Filtre à **R**éponse **I**mpulsionnelle **F**inie (RIF) d'ordre ***M***: $h(n)$ séquence finie

$$h(n) \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} \,, \qquad \boldsymbol{filtre\ non\ r\acute{e}cursif}$$

Entrée : $x(n)$ $X(z)$ → Filtre numérique RII → Sortie : $y(n)$ $Y(z)$

Filtre à **R**éponse **I**mpulsionnelle **I**nfinie (RII) d'ordre ***N***: $h(n)$ séquence infinie

$$h(n) \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}} \,, \qquad \boldsymbol{filtre\ r\acute{e}cursif}, \qquad avec\ N \geq M$$

Exercice 7.1. On veut réaliser un filtre passe-bas numérique pour un signal vocal. Les caractéristiques fréquentielles sont :

Bande passante : $F_p = 4kHz$, avec des ondulations de $0.8\ dB$;

Bande coupée commence en $F_s = 4.5\ kHz$, avec une atténuation minimale $50\ dB$;

Fréquence d'échantillonnage $F_e = 22\ kHz$.

Déterminer :

a. Les fréquences des bandes passante et coupée à temps discret.
b. Les valeurs $max\ et\ min\ de\ |H(w)|$ dans la bande passante et la bande coupée, où $H(w)$ est la réponse fréquentielle du filtre.

Filtres RIF et RII

Exercice 7.2. On considère un filtre RIF caractérisé par :

$$y(k) = x(k) + \frac{1}{2}\, x(k-1) + \frac{1}{4}\, x(k-2)$$

(a) Quel est l'ordre de ce filtre? N =
(b) Trouver la réponse impulsionnelle, $h(k)$ pour le filtre.
(c) Trouver la fonction de transfert, $H(z)$, du filtre.

(Rappel: $x(k - m) \rightarrow z^{m} X(z)$)

(d) Trouver les pôles du filtre RIF.
(e) Que peut-on conclure sur la stabilité d'un filtre RIF? Pourquoi?

Exercice 7.3. Un filtre numérique moyenneur simple est défini par :

$y(n) = \frac{1}{N}(x(n-1) + x(n-2) + \cdots x(n-N))$. C'est un filtre RIF

a. On prend N=4. Déterminer la fonction de transfert, les pôles et zéros d'un tel filtre.
b. Ecrire une forme générale pour les pôles et zéros pour N quelconque.
c. En comparant y(n) et y(n-1), déterminer une implémentation récursive de ce filtre ainsi que sa fonction de transfert, pôles et zéros correspondants pour une telle implantation.

Exercice 7.4. On considère les deux systèmes (SLID) suivants :

Système 1 : $y_1(n) = \frac{x(n)+x(n-1)}{2}$ et Système 2 : $y_2(n) = \frac{x(n)-x(n-1)}{2}$

a. Sans faire de calcul, déterminer si :
  - le système 1 est un filtre : passe-bas, passe-haut ou passe-bande.
  - le système 2 est un filtre : passe-bas, passe-haut ou passe-bande.
b. Calculer la réponse en fréquences $H_1(\Omega)\ et\ H_2(\Omega)$ des systèmes 1 et 2 respectivement.
c. Tracer leur graphe en module pour $\Omega\ entre\ -2\pi\ et\ 2\pi$.

Exercice 7.5. Soit un filtre passe-bas caractérisé par l'équation aux différences suivante :

$$y_1(n) = \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} x(n-k)$$

a. Trouver la réponse impulsionnelle h_1(n)
b. Sachant que $H_1(\Omega)$ est donnée par $H_1(\Omega) = \frac{1}{2N+1}\left[\frac{\sin(\Omega\frac{2N+1}{2})}{sin\frac{\Omega}{2}}\right]$

   On considère un nouveau filtre $y_2(n) = x(n) - y_1(n)$. Trouver $H_2(\Omega)$.
   Quel est le type du filtre $H_2(\Omega)$

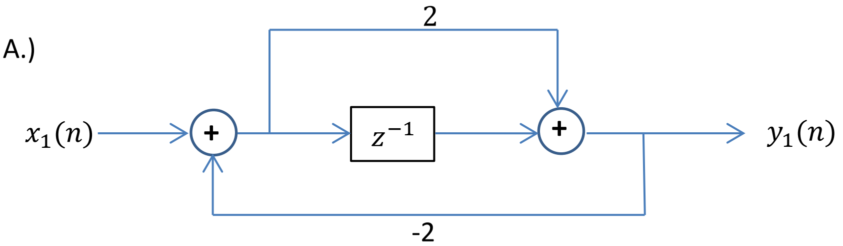
Exercice 7.6. Soit un filtre numérique d'entrée x(n) et de sortie y(n) tel que :

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 2\rho\cos(\theta)y(n-1) - \rho^2 y(n-2), \qquad \rho\epsilon R$$

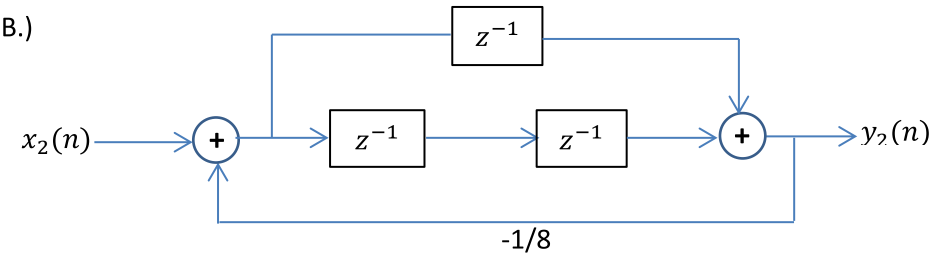
a. Dessiner la structure de ce filtre. Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie RIF ou infinie RII.
b. Calculer la fonction de transfert $H(z)$ du filtre
c. Quels sont les pôles et les zéros du filtre ? A quelle condition le filtre est-il stable ? Dessiner le diagramme pôles-zéros dans le cas $\rho = 0.8\ et\ \theta = \pi/4$
d. Donner une esquisse du module de la réponse fréquentielle.

Exercice 7.7. Trouver l'équation aux différences qui régit chacun des systèmes suivants :

A.)



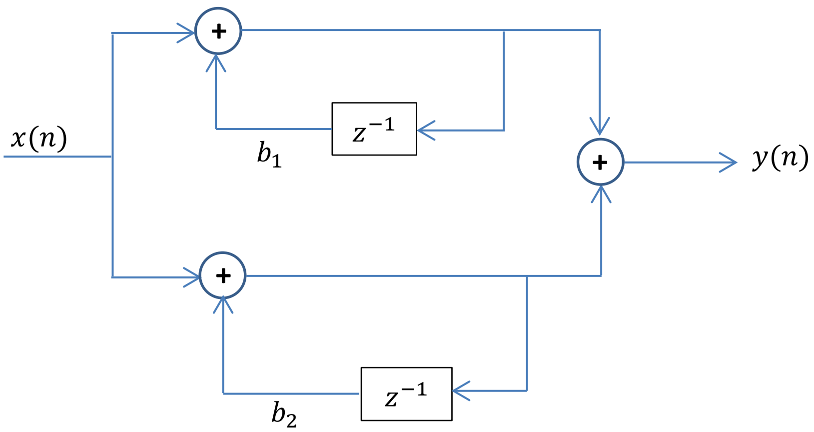
B.)



Exercice 7.8. Tracer le diagramme d'implantation des équations aux différences selon les formes directes I et II.

a. $y(n) - 1/4\,y(n-1) = 6x(n)$
b. $y(n) + 1/2y(n-1) - 1/8y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$

Exercice 7.9. On considère un filtre numérique dont la structure est représentée par la figure suivante :



a. Trouver la fonction de transfert de ce filtre $H(z)$.
b. Trouver l'équation aux différences qui régit ce filtre.
c. Donner la représentation de cette structure selon la forme directe II.

Exercice 7.10. Soit un filtre RIF de fonction de transfert $H(z) = (1 - z)(1 + z)$.

a. Tracer le diagramme des pôles et zéros pour ce filtre.
b. Tracer le graphe du module de la réponse fréquentielle $H(e^{j\Omega})$.
c. Comment peut-on classer ce filtre : passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande ? Expliquer brièvement.

Exercice 7.11. Réaliser un filtre RIF qui implémente approximativement la fonction de transfert $H(f) = \frac{1}{2}\,(1 + cos2\pi f)$.

Exercice 7.12. Soit donné un filtre analogique de fonction de transfert :

$$H_a(p) = \frac{0.5(p+4)}{(p+1)(p+2)}$$

a. Trouver un filtre numérique équivalent par la méthode d'invariance impulsionnelle.
b. Trouver un filtre numérique équivalent par la méthode de transformation bilinéaire.

Exercice 7.13. En utilisant la transformée bilinéaire, déterminer l'ordre N et la fréquence de coupure f_c du filtre analogique prototype de Butterworth répondant aux spécifications suivantes pour une synthèse à temps discret :

a) Bande passante : 8 kHz ;
b) Bande de rejet : 9 kHz ;
c) Ondulations dans la bande passante : 0.5 dB ;
d) Atténuation minimale dans la bande de rejet : 40 dB ;
e) Fréquence d'échantillonnage : 44 kHz.

Exercice 7.14. Répéter l'exercice 13 en utilisant un filtre de Tchebychev.