Annexes

Séries de Fourier des Signaux Périodiques		
Séries de Fourier de $x(t)$ avec période T_0	$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \cos(2\pi n f_0 t)$	
Calcul des coefficients	$\boldsymbol{a_n} = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(2\pi n f_0 t)\, dt$ $n = \mathbf{0}, 1, 2, \dots \dots + \infty$	$\boldsymbol{b_n} = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, sin(2\pi n f_0 t)\, dt$ $n = \mathbf{1}, 2, \dots \dots + \infty$
Séries de Fourier Complexes de $x(t)$ $f_0 = \frac{1}{T_0}$ fréquence de $x(t)$	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{j2\pi n f_0 t} \rightarrow C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t} dt$	

Propriétés de la Transformée de Fourier		
	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$	$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$
Linéarité	$a\, x(t) +\ b\, y(t)$	$a\, X(f) +\ b\, Y(f)$
Changement d'échelle	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X(\frac{f}{a})$
Décalage en temps	$x(t - t_0)$	$X(f) e^{-j2\pi f t_0}$
Décalage en fréquence	$x(t) e^{+j2\pi f_0 t}$	$X(f - f_0)$
Dérivation	$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$(j2\pi f)^n X(f)$
Intégration	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f) +\ X(0)\delta(f)$
Dualité	$x(t)$	$X(f)$
	$X(t)$	$x(-f)$
Convolution	$x(t) * y(t)$	$X(f).Y(f)$
Conservation de l'énergie	$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t))^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (X(f))^2\, df = E[X(f)]$	

Propriétés de la Transformée de Fourier à temps discret TFTD ❖ La TFTD est périodique $(periode\ f = 1\ ou\ \Omega = 2\pi)$		
Temps discret $t = nT$ On prend $T = 1$	$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(f)e^{j2\pi fn}df$	$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi fn}$
Linéarité	$a\,x(n) + b\,y(n)$	$a\,X(f) + b\,Y(f)$
Changement d'échelle	$x\left(\frac{n}{L}\right)$	$X(Lf)$
Décalage en temps	$x(n - n_0)$	$X(f)e^{-j2\pi fn_0}$
Décalage en fréquence	$x(n)e^{+j2\pi f_0 n}$	$X(f - f_0)$
Dualité	$x(n)$	$X(f)$
	$X(n)$	$x(-f)$
Différentiation	$x(n) - x(n-1)$	$(1 - e^{-j2\pi f})X(f)$
Convolution	$x(n) * y(n)$	$X(f).Y(f)$
Conservation de l'énergie	$E[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n)]^2 = \int_{n=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} [X(f)]^2\,df = E[X(f)]$	

TFTD de quelques signaux usuels ❖ La TFTD est périodique $(periode\ f = 1\ ou\ \Omega = 2\pi)\ f \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$		
signal	TFTD	condition
Dirac $\delta(n)$	1	
1	$\delta(f)$	
Echelon unité $u(n)$	$\frac{1}{1 - e^{-j2\pi f}} + \frac{1}{2}\delta(f)$	
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j2\pi f}}$	$\lvert a\rvert < 1$
$(n+1)a^n u(n)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j2\pi f})^2}$	$\lvert a\rvert < 1$
$\cos(2\pi f_0 n)$	$\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$	
$sin(2\pi f_0 n)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$	
$rect_N(n) = x(n) = \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert < \frac{N}{2} \\ 0, & sinon \end{cases}$	$\frac{sin(2\pi f\,(N+1)/2)}{sin(\pi f)}$	
Sinus cardinal $sinc\left({}^{t}/_{T}\right), T \geq 2$	$T\,rect(fT)$	

Propriétés de la Transformée de Fourier Discrète TFD ❖ **La TFD est périodique** ($\boldsymbol{période = N}$)		
Temps discret $t = nT$ On prend $T = 1$	$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$	$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$
Linéarité	$a\,x(n) + b\,y(n)$	$a\,X(k) + b\,Y(k)$
Décalage en temps	$x((n-n_0)\;mod\;N)$	$X(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$
Décalage en fréquence	$x(n)e^{+j\frac{2\pi}{N}k_0 n}$	$X((k-k_0)modN)$
Dualité	$x(n)$	$X(k)$
	$X(n)$	$N\,x((-k)mod\;N)$
Différentiation	$x(n) - x(n-1)$	$\left(1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)X(k)$
Convolution	$x(n) * y(n)\;mod\;N$	$X(k).Y(k)$
Conservation de l'énergie	$E[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1}[x(n)]^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[X(k)]^2 = E[X(k)]$	

Table des Transformée en *Z*	
Signal $x(n)$	Transformée en Z $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\,z^{-n}$
Dirac $\delta(n)$	1
Echelon unité $u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
$\cos(\Omega_0 n)\,u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\Omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\Omega_0 n)+z^{-2}}$
$sin(\Omega_0 n)\,u(n)$	$\frac{z^{-1}\,sin(\Omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\Omega_0 n)+z^{-2}}$
$x(n-n_0)\,u(n)$	$z^{-n_0}\,X(z)$
$n\,x(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$
Convolution $x(n) * y(n)$	Multiplication $X(z).Y(z)$