Introduction

Algèbre

1. Dans quel intervalle se situe $x \ si \ on \, a \ |(x+1)^3| < 27$
2. Représenter dans le plan complexe les nombres suivants :
$$z_1 = 1, \quad z_2 = -j, \quad z_3 = e^{j\pi}, \quad z_4 = e^{j\pi/3} \quad et \quad z_5 = 2\, e^{j5\pi/4}$$
3. En utilisant les formules d'Euler, simplifier les expressions suivantes :
$$z_1 = 1 + e^{j\pi} \ , \quad z_2 = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{\sin(\theta)} \ , \quad z_3 = \frac{e^{j(\varphi+\theta)} + e^{j(\varphi-\theta)}}{\cos(\theta)}$$

Représentation des signaux

Exercice 1.1 Représenter graphiquement les signaux suivants en fonction du temps t.

$a.\ rect_T(t-1)$

$b.\ t\,u(t)$

$c.(t-2)u(t-3)$

$d.\ (-t+3)u(t-2)u(t-3)$

$e^{-at}u(t-1)$

Exercice 1.2 Trouver les parties paires et impaires des signaux suivants (simplifier les formules finales) :

$a.\ \ g(t) = 4\,t\cos(10\pi t)$

$b.\ \ f(t) = (8 + t^2)\sin(32\pi t)$

Exercice 1.3 Exprimer la fonction ou porte rectangle symétrique sous forme de combinaisons de fonctions échelon unité :

$$s(t) = A\,rect_T(t) = A\,rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & si \ |t| \le \dfrac{T}{2} \\ 0 & autrement \end{cases}$$

Exercice 1.4 Même question en considérant la fonction triangle symétrique donnée par :

$$s(t) = tri_T(t) = tri\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - 2\left|\dfrac{t}{T}\right| & si \ |t| \le \dfrac{T}{2} \\ 0 & autrement \end{cases}$$

Energie et Puissance des signaux

L'énergie d'un signal temporel $s(t)$ $(qui\ peut\ \hat{e}tre\ complexe)$ sur un intervalle de temps $t_1 \leq t \leq\ t_2$ est définie par :

$$E = \int_{t_1}^{t_2} s(t)s^*(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2\, dt\ ,$$

$$pour\ t_1 = -\infty\ et\ t_2 = +\infty\ alors\ l'\acute{e}nergie\ totale\ \ E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\, dt$$

Si E_∞ est infinie on définit alors la puissance moyenne P du signal $s(t)$ sur un intervalle de temps $t_1 \leq t \leq\ t_2$ par :

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s(t)s^*(t)dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2\, dt$$

La puissance moyenne sur un horizon infini est donnée par :

$$P = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} s(t)s^*(t)dt = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}|s(t)|^2\, dt$$

Nota : $si\ E_\infty < \infty\ (\acute{e}nergie\ totale\ finie)\ \ alors\ \ P_\infty = 0\ (puissance\ moyenne\ est\ nulle)$

$si\ E_\infty = \infty\ (\acute{e}nergie\ totale\ infinie)\ \ alors\ \ P_\infty < \infty\ (puissance\ finie)\ ou\ P_\infty = \infty(inifinie)$

Exercice 1.5 Calculer l'énergie sur un horizon infini du signal :

$$s(t) = Ae^{-\alpha t}u(t) \quad \text{où } u(t)\text{: échelon unité}$$

Exercice 1.6 Classer les signaux suivants selon la classe énergétique, en calculant l'énergie E et la puissance P de chaque signal avec $(A, \theta, \omega, et\ \tau)$ *des constantes positives réelles* :

$a.)\ x_1(t) = A|\sin(\omega t + \theta)|$

$b.)\ x_2(t) = \dfrac{A\tau}{\sqrt{\tau + jt}}$

$c.)\ x_3(t) = At^2 e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$

$d.)\ x_4(t) = rect\left(\dfrac{t}{\tau}\right) + rect\left(\dfrac{t}{2\tau}\right)$

Exercice 1.7 Montrer que pour un signal quelconque $s(t)$ l'énergie totale est conservée dans les deux espaces de représentation temporelle et spectrale, relation connue sous le nom de théorème de Parseval , c'est à dire on a toujours l'équivalence :

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega)F(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$où\ F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt : transformée\ de\ Fourier\ du\ signal\ f(t)\ si\ elle\ existe.$

Exercice 1.8 Soit $u(t)$ le signal échelon unité (de Heaviside), tracer les signaux continus suivants :

a. $x(t) = u(t+1) - 2u(t-1) + u(t-3)$
b. $x(t) = (t+1)u(t-1) - t\,u(t) - u(t-2)$
c. Calculer l'énergie totale et la puissance moyenne totale de ces signaux (faire un classement énergétique de ces signaux)

Puissance moyenne d'un signal périodique

Exercice 1.9 Calculer l'énergie et la puissance sur un horizon infini du signal périodique :

$$f(t) = Asin(\omega t)$$

Exercice 1.10 On considère le signal périodique $x(t) = A\sin\left(2\pi\, {}^{t}/_{T_0}\right)$

1. Calculer la puissance moyenne, $P(t,T)$du signal sur un intervalle de mesure T.
2. Montrer que la puissance moyenne $lorsque\ T \to \infty$ est égale à celle calculée sur une période T_0 .
3. Pour quelles autres valeurs de l'intervalle de mesure obtient-on le même résultat.

Exercice 1.11 La fonction rectangle est définie par :

$$rect(t) = \begin{cases} 1\ si\ |t| \le \dfrac{1}{2} \\ 0\ si\ |t| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Soit $x(t)$ un signal périodique, de période fondamentale $T_0 = 6.$ Ce signal est décrit sur une période $0 \le t \le 6$ par : $x(t) = rect\left(\frac{t-2}{3}\right) - 4rect(\frac{t-4}{2})$
Quelle est la puissance moyenne de ce signal ?

Changement d'échelle des signaux continus

Le changement d'échelle des signaux continus peut intervenir en amplitude et aussi bien en temps.

Types de changement d'échelle → Temporel
Types de changement d'échelle → En amplitude

Le changement d'échelle temporel des signaux continus est le plus intéressant à étudier. On a 2 cas possibles, notamment la compression et la dilatation temporelle des signaux.

$$soit\ x(t)\ un\ signal\ , un\ changement\ d'échelle\ temporel\ est\ exprimé\ par:$$

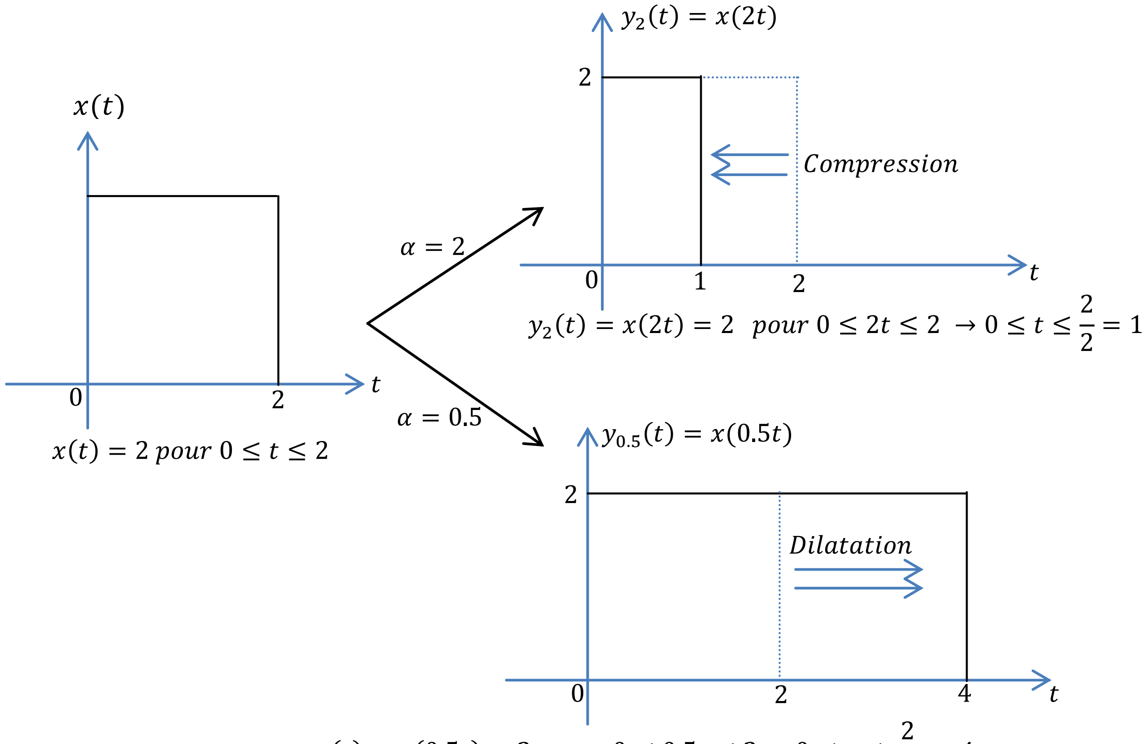
$$x(t) \xrightarrow[\text{d'échelle}]{\text{Changement}} y(t) = x(\alpha t)\ , avec\ \alpha \neq 0\ \in \mathbb{R}$$

$cas\ 1.\ \ \|\alpha\| < 1\ \rightarrow compression\ temporelle\ d'un\ signal:\ \ \alpha \in\ ]-\infty, -1[\ \cup\ ]+1, +\infty[$
$cas\ 2.\ \ \|\alpha\| > 1\ \rightarrow dilatation\ temporelle\ d'un\ signal:\ \ \alpha \in\ ]-1,0[\ \cup\ ]0, +1[$

$Exemple -\ \ Soit\ le\ signal\ x(t)\ donné\ par$:

$$x(t) = \begin{cases} 2\ pour\ 0 \leq t \leq 2 \\ 0\quad autrement \end{cases} \quad \rightarrow\ y_\alpha(t) = x(\alpha t):\ changement\ d'échelle\ selon\ t$$

$On\ va\ représenter\ le\ graphe\ de\ y_\alpha(t) = x(\alpha t)\ pour\ \alpha = 2\ et\ \alpha = 0.5$



$$y_{0.5}(t) = x(0.5t) = 2\ \ pour\ 0 \leq 0.5t \leq 2 \rightarrow 0 \leq t \leq \frac{2}{0.5} = 4$$

Exercice 1.12 Tracer le graphe des signaux suivants :

$a.)\ x_1(t) = rect(2t+5)$ $b.)\ x_2 = rect(-2t+8)$

$c.)\ x_3(t) = rect(t-0.5)sin2\pi t$ $d.)\ x_4(t) = x_3(-3t+4)$

$e.)\ x_5(t) = rect\left(-\frac{t}{3}\right)$

Exercice 1.13 Trouver la période des signaux suivants :

$a.$ $\cos 2\pi t$

$b.$ $\cos^2(2\pi t)$

i.) $\mathrm{x(t)} = \sin^2(4\pi t)$, *quelle est sa période* ?

ii.) soit $\mathrm{x(t)} = \sin(6\pi t) + \cos(5\pi t)$, *quelle est sa période* ?